

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340026

研究課題名(和文) 特異摂動論の代数解析学による微分方程式の構造論

研究課題名(英文) The structure theory of differential equations by the algebraic analysis of singular perturbation theory

研究代表者

河合 隆裕 (KAWAI, Takahiro)

京都大学・数理解析研究所・名誉教授

研究者番号：20027379

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,200,000円

研究成果の概要(和文)：超局所解析学と完全WKB解析の相互補完性を基礎に、いくつかの基本的な1次元シュレーディンガー方程式のWKB解のボレル変換像に対し、その「動かない特異点」の近傍での特異性の具体的描像(alien derivativeの計算)を得ることが出来た。同時に大きなパラメタを含む高階常微分方程式において基本的ではあるが未だ余り世の中に普及していない「仮想的変わり点」なる概念に関するmonograph “Virtual Turning Points” を本多尚文氏(北海道大学)と協力してSpringer社より刊行した。

研究成果の概要(英文)：We have succeeded in concretely describing the singularity structure of the Borel transformed WKB solutions of several basic one-dimensional Schroedinger equations near their fixed singular points. The main tool for the description is the so-called alien calculus, and the idea is based on the role of a bicharacteristic strip as a carrier of singularities of solutions of linear partial differential equations. Thus our result is an outcome of the complementarity of microlocal analysis and the exact WKB analysis. We have also studied higher order ordinary differential equations with a large parameter through its Borel transform; a virtual turning point is an indispensable ingredient in the exact WKB analysis of higher order equations. Kawai and Takei, with the collaborator N. Honda(Hokkaido University) published a monograph titled “Virtual Turning Points” (Springer; 2015), so that this novel notion may be widely appreciated by mathematical physicists and engineers.

研究分野：数物系科学

キーワード：完全WKB解析 超局所解析学 ボレル変換 動かない特異点 alien derivative 仮想的変わり点 無限階微分作用素 超局所解析的S-行列論

1. 研究開始当初の背景

Bender-Wu(Phys. Rev., 184(1969))は場の量子論における ϕ^4 模型の解析を目標としつつ、その手掛りとして非調和振動子のWKB 解析を行ったものと思われる。その解析によりWKB 解析においてはポレル変換の概念が重要であることが認識されて A. Voros(Ann. Inst. Poincaré, 39(1983))及び H. J. Silverstone(Phys. Rev. Lett., 55(1985))へとつながり、さらに F. Pham(Algebraic Analysis, Academic Press, 1988)の“Voros の仕事とEcalles の再生函数論の関連付け”へと発展した。他方、河合・竹井はこの Pham の論文に触発されて“WKB 解のポレル変換像を超局所解析的手法を用いて解析してみよう”と云う方向で研究を始めた。その中心となったのは「単純変わり点の近傍では、シュレーディンガー方程式のポレル変換像は超局所解析的には Airy 方程式のポレル変換像と同型である」と云う連携研究者 青木貴史(近畿大学)との共同研究である。(河合・竹井:特異摂動の代数解析学(岩波書店、2008)参照)最近(2012年当時)この Pham のグループの仕事と河合・竹井・青木の仕事をつなぐことにつながるとされるポレル総和可能性に関する小池達也と R. Schäfke の結果が発表されたのでそれを受けて超局所解析学と完全 WKB 解析の相互補完性を一層強めたい、と云うのが計画の出発点である。

2. 研究の目的

- (1) 1. で述べたような背景を念頭に大きなパラメタを含む極大過剰決定系の研究、特にその「仮想的変わり点」の解析的意味のより深い理解を追求する。
- (2) 高階パルヴェ方程式の構造の研究を行う。
- (3) 上述の2つの研究成果を基礎として河合・竹井は1. で触れたその著書「特異摂動の代数解析学」の増補・改訂版を英語で出版する。

3. 研究の方法

- (1) 超局所解析学と再生函数論を手段として、線型微分方程式(系)の構造論を展開する。
- (2) 「完全最急降下路」の方法を用いて「仮想的変わり点」の解析的意味の理解を深める。この議論の過程において「超局所解析学」への新しい問題提起も在り得る。(これは実際にそうであることを「4. 研究成果」欄で示す。)
- (3) 「1. 背景」欄で触れた Bender-Wu の問題意識、即ち、「非調和振動子の WKB 解析」は S-行列の理解の為の第一歩であることを忘れないように心がける。

4. 研究成果

- (1) 河合・竹井は研究協力者 神本晋吾氏(現在広島大学)と協力して、2つの単純極と一

つの単純変わり点が合流するようなシュレーディンガー方程式(M2P1T 方程式)の理論を整備し、そのような方程式は代数型 Mathieu 方程式に変換されること、さらに、その方程式のWKB 解のポレル変換像の、2つの単純極が定める「動かない特異点」における alien derivative の計算を超局所解析的手法を用いて行った。(Adv. in Math., 260(2014), 458-564. 及び 565-613)

- (2) 河合・小池は神本晋吾氏と協力してかねてより問題とされてきた(\tilde{C})型の単純極方程式(a boosted simple-pole type equation ; 即ち $[d^2/dx^2 - \eta^2(x^{-1} + \eta^{-1}(\beta x^{-2}))]\psi = 0$)のWKB 解の接続問題が次の形で解決されることを見出した:WKB 解のポレル変換像に含まれる(相互の位置関係が)「動く特異点」の近傍での特異性の相互関係は無窮階微分作用素を用いて記述される。さらにその結果を踏まえて boosted Whittaker equation、即ち $[d^2/dx^2 - \eta^2(1/4 - \alpha/x + \eta^{-1}\beta/x^2)]\psi = 0$, のWKB 解の(相互の位置関係の)動かない特異点」の近くでのその特異性の相互関係を無窮階微分作用素を用いて記述した。最も簡単に印象的な事実として、その Voros 係数の $y = 2m\pi i\alpha$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) の alien derivative の特異部分が

$$\frac{(-1)^m}{m} \cos(m\pi\sqrt{1+4\beta\partial/\partial y}) \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y - 2m\pi i\alpha} \right)$$

と現わされることを記しておく。陪特性帯に沿っての解の特異性の伝播の様子の具体的な記述にこのような形で無窮階微分作用素が関わって来る、と云う事実は超局所解析学に新しい問題提起をしたものと言えようし、又、同時に我々の計算には D. Sauzin の再生函数に関する結果(Ann. Sci. ENS, 55(2014))が良い参考になったことも記録に値いすると思う。(Lett. In Math. Phys., 106(2016))

- (3) 竹井は研究協力者 茂木貴宏氏(現マルチコミュニケーション社)と協力して“大きなパラメタを指数に含む middle convolution”に「完全最急降下路の方法」を組み合わせて高階方程式のストークス図形の決定に用いた。このような middle convolution の研究は今後超局所解析学の重要な主題になると思われる。(Adv. in Math., 310(2017))

- (4) 竹井・河合は研究協力者 本多尚文氏(北海道大学)との共著“Virtual Turning Points”(Springer, 2015)を刊行した。これは、高階 Painlevé 方程式系の一つである野海・山田系を仮想的変わり点の観点から研究した結果の報告(Chap. 2)及び高階

Landau-Zener 型の方程式の S -行列の計算における仮想的変わり点の重要性を示す (Chap. 3) ことと併せて、“ s -virtual turning point” (以下、 s -VTP と略) なる新しい概念も提出している。(Chap. 1) この s -VTP なる概念の適用できる対象はかなり限定的であるが、それだけに精確な結果を得ることが比較的容易で、河合・竹井は廣瀬三平氏 (芝浦工業大学) と協力して、たとえば Pearcey 系、 A_4 系、 D_4 系等の接方程式に現われるストークス図形の研究を行って今迄知られていない興味深い現象 (例えば non-hereditary turning point の出現、 s -VTP では記述されない (多重特性根と関係する) (陪特性曲線の自己交叉点として定まる) 「仮想的変わり点」の出現可能性等) を多く見出しつつある。(近刊予定)

(5) 我々の研究に一つの重要な動機付けを与えた Bender-Wu の仕事の元来の目標は場の量子論における S -行列の理解を深めることにあったことに鑑み、何を我々が今なし得るかを考えれば「解析性と unitarity を組合わせてどのような知見が得られるか」と云う、所謂「解析的 S -行列論」に超局所解析的視点を取り入れて「超局所解析的 S -行列論」を試みるのは自然である。このような立場から過去の文献を調べると、意外に Landau-中西曲面 (以下 LN 曲面と略記) の具体的記述が乏しいことに気付く。そこで解析的 S -行列論の泰斗 H. P. Stapp 教授 (ローレンスバークレー研究所) との議論を出発点として考察の対象を「時空 2 次元で 3 particle threshold (以下 3PT と略記) の近傍」に限定して計算機援用により具体的に LN 曲面を記述することを試みてみた。その結果は予想以上に簡明で我々にこの方向の研究の成功を確信させるものであった。即ち 3PT からある極めて小さい除外集合 N を除いた所で局所的に LN 曲面の複素化を考える限り、“複素 LN 曲面の有限性” が成立する。(RIMS Kôkyûroku Bessatsu B52(2014)) (尚、この研究過程で検討した LN 曲面の具体例は RIMS Preprint, 1809 として京都大学機関リポジトリで公開されている。) この簡明な結果に対して当然提出される疑問は“では Eden 達の見つけた奇妙な特異点 (acnode) はどこに行ったのだ”であろう。実はこれは数学的には極めて面白い現象、即ち、実 LN 曲面には Whitney の傘が含まれる為に、複素 LN 曲面を大域的に考えその実領域での切口を考えると acnode が現われる、と云う形で説明される。即ち、実 LN 曲面に含まれている Whitney の傘の大域的複素化を考えその実領域との交わりを見るとこの奇妙な特異点が出現する、と云う mechanism になっている。(Kôkyûroku Bessatsu B57(2016)) このような結果を踏まえて、若い世代に「超局所解析的 S -行列論」への興味を持ってもらえるよう、“Sato's postulates” への注記、と云う形

での論文を河合・本多が準備した。(Kôkyûroku Bessatsu, B61(2017)) さらに、このような研究過程で得られた “complemented graph” の概念の有用性を示す論文も別途準備した。(近刊予定) 今後さらに hierarchical principle の超局所解析的見地からの研究が、 S -行列の摂動展開の構造の研究に役立つことを期待している。特に、その際、上述の論文でも触れた、“1 本の内線の contraction によって 2 つのループが同時につぶれる時には、必ず pinch point が関係する” と云う事実は今迄気付かれていなかった事実だけに中心的な役割を果たしてくれるだろう、と考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

N. Joshi and Y. Takei, Toward the exact WKB analysis of discrete Painlevé equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B61(2017), 83-96, 査読あり, DOI: なし

N. Honda and T. Kawai, An invitation to Sato's postulates in micro-analytic S -matrix theory, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B61(2017), 23-56, 査読あり, DOI: なし

S. Kamimoto, T. Kawai and T. Koike, On the singularity structure of WKB solutions of the boosted Whittaker equation — its relevance to resurgent functions with essential singularities, Lett. in Math. Phys., 166(2016), 1791-1815, 査読あり, DOI: 10.1007/s11005-016-0887-x

N. Honda and T. Kawai, A study of pinch points and cusps in the Landau-Nakanishi geometry, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B57(2016), 175-194, 査読あり, DOI: なし

T. Moteki and Y. Takei, Stokes geometry of higher order linear ordinary differential equations and middle convolution, Advances in Mathematics, 310(2017), 327-376, 査読あり, DOI: 10.1016/j.aim.2017.02.006

Y. Takei, On the fourth order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B52(2014), 301-316, 査読あり, DOI: なし

S. Kamimoto, T. Kawai and T. Koike, Resurgent functions and linear differential operators of infinite order — Their happy marriage in exact WKB analysis, RIMS Kôkyûroku Bessatsu,

B52(2014), 127-146, 査読あり, DOI: なし
N. Honda, T. Kawai and H. P. Stapp,
On the geometric aspect of Sato's
postulates on the S -matrix, RIMS
Kôkyûroku Bessatsu, B52(2014), 11-53,
査読あり, DOI: なし, 国際共同研究
S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei,
Exact WKB analysis of a Schrödinger
equation with a merging triplet of two
simple poles and one simple turning
point. , Advances in Mathematics,
260(2014), 565-613, 査読あり,
DOI: 10.1016/j.aim.2014.02.028
S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei,
Exact WKB analysis of a Schrödinger
equation with a merging triplet of two
simple poles and one simple turning
point. I, Advances in Mathematics,
260(2014), 458-564, 査読あり,
DOI: 10.1016/j.aim.2014.02.026
T. Koike and Y. Takei,
Exact WKB analysis of second-order
non-homogeneous linear ordinary
differential equations, RIMS
Kôkyûroku Bessatsu, B40(2013),
293-312, 査読あり, DOI: なし

[学会発表](計 25 件)

Y. Takei,
Stokes geometry of higher order ODEs
and middle convolution, "Asymptotic
and computational aspects of complex
differential equations", 2017/2/16,
E. De Giorgi 数学研究センター (ピサ,
イタリア), 招待講演
T. Kawai and Y. Takei,
On virtual turning points — an
important ingredient of the WKB
theory of higher order ODEs,
"Resurgence at Kavli IPMU",
2016/12/16, 東京大学 Kavli IPMU
(千葉県柏市), 招待講演
竹井 義次,
微分差分方程式系のインスタントン解の
構成について, 研究集会「第 23 回超局所
解析と古典解析」, 2016/12/4, 別府市ふれ
あい広場サザンクロス (大分県別府市)
S. Hirose, T. Kawai and Y. Takei,
On some recent results in the theory of
virtual turning points, RIMS 研究集会
「超局所解析と特異摂動論の新展開」,
2016/10/6, 京都大学数理解析研究所 (京
都府京都市), 招待講演
Y. Takei,
On instanton-type formal solutions of
singular-perturbative Hamiltonian
systems with several time variables,
"Formal and Analytic Solutions of
Partial Differential Equations",

2016/8/31, リスボン大学 (リスボン, ポ
ルトガル), 招待講演
Y. Takei,
Exact WKB analysis for continuous and
discrete Painleve equations,
"Resurgence in Gauge and String
Theories", 2016/7/20, 高等工業大学 (リ
スボン, ポルトガル), 招待講演
Y. Takei,
Toward the exact WKB analysis of
systems of differential-difference
equations, RIMS 共同研究「Exponential
Asymptotics of Difference and
Differential Equations」, 2016/6/8, 京
都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 招
待講演
Y. Takei,
Exact WKB analysis for continuous and
discrete Painleve equations, "Geometry
of Wall-Crossing, Deformation
Quantization and Resurgent Analysis",
2016/4/19, 東北大学知の館 (宮城県仙
台市), 招待講演
竹井 義次,
離散パルベ方程式のストークス現象に
ついて, 研究集会「第 22 回超局所解析と
古典解析」, 2015/12/6, 富山県民会館 (富
山県富山市)
Y. Takei,
On the exact WKB analysis of discrete
Painleve equations, RIMS 研究集会
「Microlocal Analysis and Singular
Perturbation Theory」, 2015/10/9, 京
都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 招
待講演
T. Kawai,
An invitation to Sato's postulates in
micro-analytic S -matrix theory, RIMS
研究集会「Microlocal Analysis and
Singular Perturbation Theory」,
2015/10/6, 京都大学数理解析研究所 (京
都府京都市)
Y. Takei,
WKB analysis for the discrete Painleve
equation, "Analytic, Algebraic and
Geometric Aspects of Differential
Equations", 2015/9/17, 数学研究会議セ
ンター (ベドレボ, ポーランド), 招待講
演
竹井 義次,
パルヴェ方程式と離散パルヴェ方
程式, 研究集会「大阪梅田微分方程式セミナ
ー」, 2015/2/22, 関西学院大阪梅田キャン
パス (大阪府大阪市), 招待講演
竹井 義次,
非線型変わり点の合流現象と 4 階 I 型
パルベ方程式, 研究集会「第 21 回超局
所解析と古典解析」, 2014/12/6, 松藤ブ
ラザ「えきまえ」(長崎県長崎市)

竹井 義次,

The fourth order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, 研究集会「第5回ハミルトン系とその周辺」, 2014/5/30, 金沢大学サテライトプラザ(石川県金沢市), 招待講演

竹井 義次,

特異摂動の代数解析学概説, 2014 年度日本数学会年会, 2014/3/18, 学習院大学(東京都豊島区), 企画特別講演

Y. Takei,

The fourth-order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, "Recent progress in the theory of Painleve equations: algebraic, asymptotic and topological aspects", 2013/11/7, ストラスブール大学(ストラスブール, フランス), 招待講演

Y. Takei,

The fourth-order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, RIMS 研究集会「微分方程式の指数解析とその周辺」, 2013/10/18, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 招待講演

T. Kawai,

Sato's postulates revisited through the Borel resummation of the perturbation series, RIMS 研究集会「Exponential analysis of differential equations and related topics」, 2013/10/15, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

T. Kawai,

On the singularity structure of WKB solutions of the boosted Whittaker equation — its relevance to resurgent functions with essential singularities, "Microlocal analysis and spectral theory", 2013/9/25, CIRM(マルセイユ, フランス)

⑳ Y. Takei,

On the exact WKB analysis for higher order differential equations, "Global Study of Differential Equations in the Complex Domain", 2013/9/2, Banach センター(ワルシャワ, ポーランド), 招待講演

㉑ Y. Takei,

The fourth-order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, "Formal and Analytic Solutions of Differential, Difference and Discrete Equations", 2013/8/27, 数学会研究センター(ベドレボ, ポーランド), 招待講演

㉒ Y. Takei,

On the turning point problem for Painleve equations with a large parameter, The 6th Pacific RIM

Conference, 2013/7/4, 札幌コンベンションセンター(北海道札幌市), 招待講演

㉓ 竹井 義次,

完全 WKB 解析と multisummability, 研究集会「第28回松山キャンプ」, 2013/1/5, 山口大学理学部(山口県山口市)

㉔ Y. Takei,

Exact WKB analysis and multi-summability — A case study, RIMS 研究集会「超局所解析と漸近解析の最近の進展」, 2012/10/25, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 招待講演

〔図書〕(計1件)

N. Honda, T. Kawai and Y. Takei, Springer, Virtual Turning Points, 2015, 138

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河合 隆裕 (KAWAI, Takahiro)
京都大学・数理解析研究所・名誉教授
研究者番号: 20027379

(2) 研究分担者

竹井 義次 (TAKEI, Yoshitsugu)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 00212019

小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80324599

(3) 連携研究者

青木 貴史 (AOKI, Takashi)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号: 80159285