

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 21 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340028

研究課題名(和文) 圧縮性流体方程式の解の安定性と分岐解析

研究課題名(英文) Analysis of stability and bifurcation for compressible fluid equations

研究代表者

隠居 良行 (KAGEI, Yoshiyuki)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：80243913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,200,000円

研究成果の概要(和文)：圧縮流体方程式の分岐・安定性解析の数学理論の構築を目指して、層状領域や柱状領域における定常および時間周期的平行流解の安定解析を行い、平行流解のまわりの解の漸近挙動は、空間次元 n が3以上の場合は $n-1$ 次元線形熱方程式で記述され、 $n=2$ のときは1次元粘性Burgers方程式で記述されることを示した。Poiseuille流の場合に線形化作用素のスペクトルを詳細に解析し、不安定性の十分条件をReynolds数とMach数によって与えた。不安定化に伴う時空周期的進行波解の分岐の証明を与えた。空間周期パターンの安定性解析の第一段階として周期的層状領域上の解の漸近挙動の解析をBloch変換を用いて行った。

研究成果の概要(英文)：To establish mathematical theory for bifurcation and stability in the compressible Navier-Stokes equation, we studied the stability of stationary and time-periodic parallel flows. We proved that the asymptotic behavior of parallel flow is described by a linear heat equation when the space dimension n is greater than or equal to 3, and by a one-dimensional viscous Burgers equation when $n=2$. In the case of the Poiseuille flow, we derived a sufficient condition for the instability in terms of the Reynolds and Mach numbers. Furthermore, we proved the bifurcation of a family of space-time-periodic traveling waves when the Poiseuille flow is getting unstable. As a first step of the stability analysis of space-periodic patterns, we investigate the stability of the motionless state on periodic infinite layer, and derived the asymptotic leading part of the perturbation by using the Bloch transformation.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード： Navier-Stokes equation compressible asymptotic behavior spectral analysis stability in stability bifurcation

1. 研究開始当初の背景

圧縮流体の基礎方程式は準線形双曲型-放物型連立偏微分方程式であり、その双曲型的側面による波の伝播や放物型的側面による粘性拡散が、領域の境界や初期値の空間無限遠方での挙動(無限遠方での境界条件)などと複雑に絡まりあい、解は興味深い漸近挙動を呈する。

このような方程式系の数学解析については、空間多次元の場合、流体が静止している状態を表す空間一様な静止定常解のまわりの解の漸近挙動は詳細に解析されており、解の漸近挙動の精密な様相が得られていた。応用上より重要な空間非一様な定常解などが現れる場合は、方程式の双曲型的側面が強くなるため解析にさまざまな困難が生じ、より詳細な解のダイナミクスの解析が求められていた。

一方、非圧縮流体の場合は、基礎方程式である非圧縮性 Navier-Stokes 方程式が半線形放物型方程式の枠組に分類されるため、時空非一様な解の安定性や漸近挙動に関する数学解析理論が整備され、詳細な解析がなされている。例えば、平行な2枚の平板の間の領域(層状領域)や無限に長いパイプ(柱状領域)における問題では、解析的半群の理論、中心多様体理論などが有効に用いられ、解の分岐や安定性、空間周期的進行波解の安定性など、時空非一様な解のまわりにおけるダイナミクスの解析がなされていた。

2. 研究の目的

上述のように流体運動を記述する非線形偏微分方程式に対する解の安定性および分岐解析の数学理論は、半線形放物型方程式系の枠組みに分類される非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対しては整備されてきたが、圧縮性 Navier-Stokes 方程式のような準線形双曲-放物型方程式系に対しては未だ十分な理論が構築されていない。本研究では、層状領域や柱状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の非自明な流れを表す定常解や時間周期解などの安定性および分岐解析を展開し、圧縮流体方程式に対する安定性・分岐理論を構築することを研究の目的とする。

3. 研究の方法

空間的に非一様な流れの場をもつ定常解の安定性を調べるために、空間非一様な定常解のなかでは最も単純な形状をした平行流解(ある方向に一様な流れ)のまわりの解の漸近挙動を考察した。圧縮性 Navier-Stokes 方程式の平行流解の安定性解析においては、平行流解の空間非一様性などに起因して方程式の双曲型的側面が強くなり、線形化半群が解析的半群にならないなどの非圧縮流体の場合とは異なる困難が生じる。しかしながら、線形化作用素のスペクトルの構造に基づく解の分解とエネルギー法とを組み合わせ、

非線形相互作用を詳細に調べることによって、Reynolds 数および Mach 数が十分小さいときに定常平行流解の安定性を証明した。層状領域における安定性の解析手法を柱状領域へと拡張した。

定常 Poiseuille 流の場合に、線形化作用素のスペクトルと Reynolds 数および Mach 数との関係を詳細に解析し、Poiseuille 流の不安定性を示した。Poiseuille 流の不安定化に伴い、時間周期解の分岐が予想されたが、進行波解の分岐問題に帰着させ、可微分性の欠損を克服するなど、時空間周期的進行波解の分岐証明の方法を開発した。

上述の定常平行流解は層状領域の水平方向には一様であるため、その解析には水平方向変数に関する Fourier 変換が有効に用いられた。この手法は空間周期パターンの安定性解析には用いることができない。そこで、空間周期パターンをもつ定常解の安定性解析の第一歩として、領域の境界が周期的に変動する周期的層状領域における静止状態の安定性を考察した。Fourier 変換の代わりに新たに Bloch 変換を用いた解析を導入し、圧縮流体方程式の空間周期パターンの安定性解析の土台を構築した。

時空間の両変数について非一様な流れをもつ解の安定性を調べるために層状領域における時間周期的平行流解の安定性を考察した。線形化発展作用素の低周波部分に対するスペクトル解析を水平方向変数に関する Fourier 変換を通じて展開し、そのフロケ表現を導出した。また時間周期外力下における全空間上の時間周期問題に対しても同じく線形化発展作用素に対するモノドロミー作用素のスペクトル解析を展開して、時間周期解の存在、安定性を証明することに成功した。

研究課題の解析のためには、非線形偏微分方程式に対する関数解析的手法、実解析的手法、無限次元力学系理論などのさまざまな手法が必要であり、関連する論文の精読や偏微分方程式関係の図書の購読により解析手法の研究、現状の分析、研究の動向に関する情報収集を行った。

毎週1回「九州関数方程式セミナー」に偏微分方程式の研究者を招へいし、セミナー講演を通じて研究討論、意見交換を行った。

偏微分方程式関連の研究集会を開催、あるいは集會に参加するなどして、国内外の非線形偏微分方程式の研究者との研究交流を行い、最新の手法、視点、研究の動向に関する情報収集を行った。平成24年度~27年度に開催した研究集会は以下のとおりである。

・「九州における偏微分方程式研究集会」開催地：福岡(H25年~H28年、毎年1月開催)

・「若手のための偏微分方程式と数学解析」開催地：福岡(H25年~H28年、毎年2月開催)

「Ito Workshop on Partial Differential Equations」開催地：福岡(H26年~H27年、毎年8月開催)

「Saga Workshop on Partial Differential Equations」開催地：佐賀（H27年～H28年，毎年3月開催）

「国際研究集会 International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics」開催地：奈良，H25年3月

「国際研究集会 Mathematical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations」開催地：福岡，H25年11月

「国際研究集会 Korea-Japan workshop on Nonlinear PDEs」開催地：蔚山（韓国），H27年11月

4. 研究成果

(1) 定常平行流解の安定性：

先行研究において空間次元 n が3以上のときレイノルズ数およびマッハ数が十分小さければ，平行流型定常解は十分小さな摂動に対して漸近安定であり，摂動の時間無限大における漸近挙動はある $n-1$ 次元線形熱方程式の解で記述されることを示していたが，本研究において $n=2$ の場合を考察し，レイノルズ数およびマッハ数が十分小さければ，平行流型定常解は十分小さな摂動に対して漸近安定であることを示した．摂動の時間無限大における漸近挙動については， n が3以上の場合とは異なり， $n=2$ のときは1次元粘性 Burgers 方程式の解によって記述されることを示した．さらにこの結果を柱状領域に対して拡張した．

(2) ポアズイユ流の不安定性と進行波解の分岐：

(1)の平行流の安定性をポアズイユ流の場合に詳細に考察し，マッハ数が大きいときの不安定性条件を与えた．非圧縮流体の場合，ポアズイユ流に対する臨界レイノルズ数は約 5772 であることが知られているが，ここで得られた不安定性判定条件によると，圧縮流体の場合，マッハ数が大きければレイノルズ数が 5772 に比べてはるかに小さい場合でもポアズイユ流は不安定になることがわかる．（たとえばマッハ数が約 2.5 のときはレイノルズ数が約 10 でポアズイユ流は不安定となる．）さらに不安定化に伴う時間周期的な進行波解の分岐証明に成功した．ここで確立した分岐の証明方法は他の圧縮流の分岐問題にも適用可能なものである．

(3) 平行流型時間周期解の安定性：

平行流型時間周期解の線形化安定性を考察し，レイノルズ数およびマッハ数が十分小さければ線形化方程式の解は時間無限大において， $n-1$ 次元の熱方程式の解にある時間周期関数を乗じた関数に漸近することを示していたが，本研究では，さらに詳細な解析を進め，線形化発展作用素の低周波部分の Floque 表現を導出した．

(4) 周期的層状領域における安定性解析：

n 次元層状領域の境界が $n-1$ 次元空間周期的超曲面である場合に圧縮性 Navier-Stokes

方程式の解の時間無限大における漸近挙動の考察を行った．境界が $n-1$ 次元超平面である場合は，無限に広がる方向の $n-1$ 個の変数に関する Fourier 変換を用いることによって線形化作用素のスペクトル解析を行い，平行流解の周りの解の長時間ダイナミクスの詳細が

わかったが，境界が超平面でない場合は Fourier 変換を用いることができない．本研究では静止状態の周りでの線形化半群のスペクトル解析を Bloch 変換を用いることによって行った．線形化半群は2つの部分に分解され，1つの部分は時間無限大において $n-1$ 次元定係数2階楕円型作用素によって生成される半群に漸近し，残余部分は指数的に減衰することを示した．ここで現れる $n-1$ 次元定係数2階楕円型作用素の主要部の係数は，周期的層状領域の基本周期領域上の非斉次 Stokes 方程式の解を用いて与えられる．本研究における Bloch 変換を用いたスペクトル解析は圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間周期パターンを持つ解の安定性解析の基礎となるものである．

(5) 全空間上の時間周期問題：

n 次元全空間上の時間周期的外力作用化における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間周期解の存在と安定性を考察した．非有界領域上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題の研究はほとんど見られず，Ma-鵜飼-Yang (2010)による研究が知られていたが，空間次元 n に対して5以上という条件が課されており， $n=2,3$ の場合の存在・安定性の問題は未解決であった．本研究では空間次元 $n=3$ を含む n が3以上の場合に，時間周期外力にある種の対称性を課して，時間周期解の存在を示した．証明では，方程式を低周波部分と高周波部分に分解して，それぞれの部分のスペクトル解析を重み付きソボレフ空間において行うことによって必要な評価を導出して時間周期解の存在を示した．低周波部分については，線形化発展作用素に対するモノドロミー作用素が空間無限遠方で線形化定常問題の解作用素に漸近することを見出して評価を行った．高周波部分は重み付きエネルギー法を用いてモノドロミー作用素のスペクトル半径が真に1より小さいことを示した．得られた時間周期解は十分小さな攪乱に対して漸近安定であり，攪乱の L^2 ノルムは時間無限大において n 次元熱核と同じ時間減衰を示した．

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 31 件)

Yoshiyuki Kagei and Naoki Makio, Spectral properties of the linearized semigroup of the compressible Navier-Stokes equation on a periodic layer,

Publ. Res. Inst. Math. Sci., {¥bf 51}, no. 2 (2015). 査読有 .

Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida, Instability of plane Poiseuille flow in viscous compressible gas, J. Math. Fluid Mech., {¥bf 17} (2015, March), pp. 129--143. 査読有 . DOI: 10.1007/s00021-014-0191-4

Yoshiyuki Kagei and Kazuyuki Tsuda, Existence and stability of time periodic solution to the compressible Navier-Stokes equation for time periodic external force with symmetry, J. Differential Equations, {¥bf 258 } (2015, January), no. 2, pp. 399--444. 査読有 . DOI: 10.1016/j.jde.2014.09.016

Jan Brezina and Yoshiyuki Kagei, Spectral properties of the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow, J. Differential Equations, {¥bf 255}, no. 6 (2013, September), pp. 1132--1195. 査読有 . <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.036>

Yoshiyuki Kagei and Yasunori Maekawa, On asymptotic behaviors of solutions to parabolic systems modelling chemotaxis, J. Differential Equations, {¥bf 253}, no. 11 (2012, December), pp. 2951--2992. 査読有 . doi:10.1016/j.jde.2012.08.028

Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, Arch. Rational Mech. Anal., {¥bf 205}, no. 2 (2012, August), pp. 585--650. 査読有 . 10.1007/s00205-012-0516-5

Jan Brezina and Yoshiyuki Kagei, Decay properties of solutions to the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow, Math. Models Meth. Appl. Sci., {¥bf 22}, no. 7 (2012, April), 1250007 (53pages) 査読有 . <http://dx.doi.org/10.1142/S0218202512500078>

[学会発表](計 116 件)

Yoshiyuki Kagei, On Chorin's method for stationary solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation, The Navier-Stokes Equations and Related Topics -- In Honor of the 60th Birthday of Professor Reinhard Farwig --, March 9, 2016, Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Japan

隠居良行, Traveling waves bifurcating from Poiseuille flow in viscous compressible fluid, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2015年12月19--20日, 東京大学大学院数理科学研究科

Yoshiyuki Kagei, Instability of Poiseuille flow in viscous compressible fluid, Banach Center Conference, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems, New Trends, August 30--September 5, 2015, Bedlewo, Poland

Yoshiyuki Kagei, On the instability of Poiseuille flow in viscous compressible fluid, The fourth international conference on nonlinear evolutionary partial differential equations -- theories and applications, June 3, 2015, Shanghai Jiao Tong University

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況(計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等

6 . 研究組織
(1)研究代表者
隠居 良行 (KAGEI, Yoshiyuki)
九州大学・大学院数理研究院・教授
研究者番号 : 80243913

(2)研究分担者
川島 秀一 (KAWASHIMA, Shuichi)
九州大学・大学院数理研究院・教授
研究者番号 : 70144631

小林 孝行 (KOBAYASHI, Takayuki)
大阪大学・基礎工学研究科・教授
研究者番号 : 50272133

中村 徹 (NAKAMURA, Tohru)
熊本大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号 : 90432898