

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24500006

研究課題名(和文) 計算機援用による計算困難性証明手法の展開

研究課題名(英文) Developing computer-assisted methods for proving computational intractability

研究代表者

天野 一幸 (Kazuyuki, Amano)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：30282031

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,100,000円

研究成果の概要(和文)：論理関数の多項式しきい値表現について、次数については成立するXOR補題と呼ばれる性質が、重さや表現長といった他の尺度については成立しないことを明らかにした。論理関数の2者間通信による非決定性通信計算量をグラフの分割問題に帰着する手法を開発し、この手法を用いてクリーク対独立点集合問題に対する通信量の下界を改善することに成功した。更に、しきい値素子からなる論理回路の充足可能性判定問題に関する新たなアルゴリズムの開発に成功するなどの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：On the representation of Boolean functions by polynomial threshold functions (PTF, in short), we showed that the property called XOR Lemma, which has shown to be true for PTF degree, is not hold if we consider other important measures such as PTF weight or length. We developed a method for reducing the problem of analyzing the non-deterministic communication complexity of Boolean functions to the one of constructing a decomposition of a certain graph, and gave an improved lower bound on the complexity of the clique versus independent set problem. In addition, we gave a new algorithm for satisfiability problem for a certain class of threshold circuits.

研究分野：計算量理論

キーワード：計算量理論 論理関数 論理回路 下界 計算機援用証明 数理計画

1. 研究開始当初の背景

与えられた仕様を満足するハードウェアを構成するのに必要な部品の個数や、与えられた問題を解くのに必要な計算資源の量を最小化する問題を考えるとき、予めコスト最小化の限界点を明らかにしておくことは極めて重要である。この問題は、自然な形で、論理関数に対する回路計算量の下界を導出する問題に帰着することができる。計算機科学分野における最重要未解決問題である“P NP 予想”の解決にも直接繋がるこの問題に対しては、国内外を通じて、半世紀以上に渡り精力的な研究が続けられているものの、下界を評価し得る汎用的手法は未だ知られていない。

また、近年のアルゴリズム理論の深化と、計算機性能の飛躍的向上とによって、従来現実的な時間では計算不能であると考えられていた様々な大規模問題に対しても、近似的解を与えることが可能となってきた。このような状況化でも、たとえば、その近似度合いや、各々の近似度を達成するのに必要な計算資源の量の下界を知ることは、非常に有用である。本研究では、以上のような様々な状況に対応しうる計算困難性の証明手法の開発を目標とする。一般に、このような不可能性の証明は非常に難しく、理論計算機科学分野における挑戦的課題と位置づけられている。

2. 研究の目的

本研究の主たる目的は、これまでに得られているいくつかの個別問題に対する計算量の評価手法をベースに、より汎用的かつ重要な局面にも対応可能な計算量の評価手法へと展開を図ることである。特に、計算量の解析において、最も広く用いられる論理回路モデルに対する手法の開発を最大の目標とする。また、これへ向けたステップとして、各素子の出次数を1に制限した論理回路に等価なモデルである論理式モデルや、深さを制限したしきい値素子からなる回路に対する計算量の評価手法の開発を目指す。

本研究の特色のひとつは、その核心部分に計算機による大規模な計算を含む証明手法の追及にある。例えば、ある論理回路の構成には基本素子が10個以上必要であるといった定数的下界の証明は、全ての可能性を列挙・検証することにより行えるが、本研究は、この種のしらみつぶし的手法の高速化を目的とするものではない。計算量の漸近的値に対する、例えば、入力サイズを n としたときに、 n の2乗や3乗といった、あるいは、指数関数的な、実際局面においても有意な下界の導出手法の開発を目指す。

本研究では特に、種々の計算モデルに対する下界の導出を、実行可能な数理計画問題等に帰着するというアプローチを試みる。例えば、(i) 漸近的計算量の次数の下限が目的関数となるような大規模数理計画問題として

定式化し、これを解くことにより下界を得る、(ii) 計算困難な問題に特徴的に内在するであろう数学的構造を捉え、その存在不可避性を大規模数理計画的手法により立証することを通じて下界を得る、等の様々なアプローチを試みる。各種の計算モデルに対して、それぞれ異なるタイプの数理最適化手法が対応することが想定されるが、この具体的な対応関係を明らかにすることを特に重視して研究を行う。

また、これら計算量に関わる解析を通じて得られる知見をベースに、グラフ理論における各種パラメータや数学的な最適化問題といった、より汎用的な問題に対しても、その目的的最適化関数に対する一定の評価値が得られる手法の開発をも試みるものとする。

3. 研究の方法

本研究は、いくつかの個別問題に対してその開発および適用に成功してきた計算機援用型の計算困難性証明手法をベースに、より中心的かつ重要な問題へと展開を図ることを主眼とする。これへ向けて、特に、以下の2点を柱に研究を進める。(i) 強い計算量の下界証明が知られる、定数段数論理回路、単調回路、決定木等の限定された計算モデルに対する、より深い理論的考察。すなわち、これらのモデル上で計算困難な問題に内包される数学的に記述可能な性質の抽出、および、下界証明技法の数理計画的な概念上での再構築。(ii) 上で得られた数学的性質や下界証明技法の、より汎用的な計算モデル上への一般化。および、これらを組み入れた計算機援用型の計算困難性証明手法の構築。

研究を進めるにあたって、各種計算モデルにそれぞれ適した数理計画モデルを明らかにし、これらに対する解析を通じて計算量の評価手法の開発を試みるものとする。例えば、しきい値素子からなる回路においては、その各素子の働きが線形式で表されることに着目し、線形計画、あるいは、整数計画をベースにしたモデルを構築する。また、通常論理素子からなる論理回路においては、その計算過程の無矛盾性を表す充足可能性、あるいは、これを自然な形で記述した整数計画をベースにしたモデルを構築する。

これらモデルに対して実際に大規模な計算機実験を行い、例えば、(i) 各種計算モデルにおけるローカルな計算過程を列挙し、このような構造が不可避的に存在することを立証する、(ii) 構造の存在性がある種の数理最適化問題の解として具現化するような定式化を求め、得られる問題を実際に解くことを通じて証明を行う、等の様々なアプローチを追究する。ここでは、理論的考察と計算機実験を行き来しつつ、柔軟に体系を組み立てて行くものとする。また、このステップにおいては、各種計算モデルとそれに適した数理計画的定式化の対応関係を明らかにする

ことを重視して研究を進める．

論理関数の計算量の評価も、より広い枠組みで捕らえるならば、ある種の最適化問題とすることができる．したがって、上で得られた数理計画的方法論を、より広い範囲の最適化問題、例えば、グラフに対するパラメータや、重要な組み合わせ数学的諸問題の解の探求等に対しても適用可能であるかについても検討する．

4．研究成果

本研究は、様々な計算モデルにおける計算量の評価手法の開発を目指したものである．特に、計算機援用型のアプローチによる手法の開発を積極的に追及した．その結果、特に通信計算量や、しきい値回路計算量の評価に対する顕著な結果を含む様々な成果を得ることに成功した．これらは、合計9編の学術論文として発表し、また、これら成果に関する合計9回の学会発表を行った．

本研究により得られた主な成果を以下に示す．

- (1) 論理関数の表現手法の一つである多項式しきい値表現について研究を行い、特に、XOR 補題と呼ばれる性質について深く検討を行った．その結果、次数については成立する XOR 補題と呼ばれる性質が、表現長や重さといった他の尺度を用いた場合には成立しないという、従来の予想とは異なる顕著な結果を明らかにした．この結果を得るための主要な部分は、計算機による実験およびその結果からの理論的性質の抽出という、本研究課題で目指したアプローチによるものである．また、この問題が数理計画問題における整数性ギャップの評価という、より広範な応用を持つ重要な問題と密接な関係にあることをも明らかにした．これらの結果を、国際会議 LATA、および、国内の学会等において発表を行った．
- (2) より一般的な数理的問題として、3次元空間への立方体の最疎充填問題について研究を行った．空間内への立体の最密充填については広く研究が行われているものが、目的をある条件を満たすうち、最疎な充填を目指すものとした研究は独創的なものである．本研究では、この問題を整数計画問題へと帰着し、得られた大規模問題を実際に計算機実験により解くというアプローチにより、様々なサイズの空間に対する最疎な充填を明らかにすることに成功した．また得られた結果を解析し、また、新たな帰着手法を開発することにより、無限の空間サイズを持つ場合に対する充填率の下界と上界を、有限サイズに対する結果から得ることのできる手法の開発に成功した．この結果を

国内学会論文誌において発表した

- (3) 計算量理論分野において 1990 年代より未解決であったクリーク対独立点集合問題に対する非決定性通信計算量の下界導出問題について研究を行った．特にこの問題を完全グラフの二部グラフ分解へと帰着する新たな手法を開発することに成功した．本手法はより効率の良い分割の構成が、直ちにより強い下界の構成に繋がるという注目すべき両面性を持っている．更に、完全グラフに対する効率の良い分割方法を具体的に構成することにより、従来より優れた通信計算量の下界を得ることに成功した．この結果を2編の国際論文誌や国内学会において発表した．また、この成果の一部を発表した指導学生が学会賞を受賞するなど高い評価を得た．
- (4) 2層のしきい値回路に対する計算量の下界の導出手法の開発を行った．近年、論理関数の計算量の下界の導出について、アルゴリズムの開発と下界の導出の表裏一体性に着目し、対象とする回路クラスに対する充足可能性判定アルゴリズムの開発を通じて計算量下界を試みる動きが盛んである．本研究では、この流れにそって、ある種の制約を設けた2層のしきい値回路を定義し、これに対する充足可能性判定アルゴリズムの開発に成功した．これを通じて、計算量クラス NEXP に対する新たな計算複雑さの下界の導出にも成功した．この成果は、国内学会論文誌、および、国際会議等で発表した．
- (5) グラフ理論における重要なパラメータの一つであるセキュア集合に関する研究を行った．特に、超立方体グラフ等の特別な形状のグラフに対するセキュア集合のサイズに対する新たな評価手法の開発や、一般のグラフに対して最小サイズの集合を高速なアルゴリズムの開発に成功した．この成果を国内学会論文誌において発表した．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Kazuyuki Amano, On XOR Lemma for Polynomial Threshold Weight and Length, Proceedings of the 10th International Conference on Language and Automata Theory and Applications (LATA16), 査読有, LNCS 9618, 259-269, 2016.
DOI:10.1007/978-3-319-30000-9_20

Kazuyuki Amano, Shin-ichi Nakano, Koichi Yamazaki, Anti-Slide, Journal of Information Processing, 査読有, 23(3), 252-257, 2015.
DOI:10.2197/ipsjjip.23.252

Kazuyuki Amano, Atsushi Saito, A Satisfiability Algorithm for Some Class of Dense Depth Two Threshold Circuits, IEICE Transaction on Information and Systems, 査読有, E98-D(1), 108-118, 2015.
DOI:10.1587/transinf.2014EDP7127

Kazuyuki Amano, Kyaw May Oo, Yota Otachi, Ryuhei Uehara, Secure Sets and Defensive Alliances in Graphs: A Faster Algorithm and Improved Bounds, IEICE Transaction on Information and Systems, 査読有, E98-D(3), 486-489, 2015.
DOI:10.1587/transinf.2014FCP0007

Manami Shigeta, Kazuyuki Amano, Ordered Biclique Partitions and Communication Complexity Problems, Discrete Applied Mathematics, 査読有, 184, 248-252, 2015.
DOI:10.1016/j.dam.2014.10.029

Kazuyuki Amano, Some Improved Bounds on Communication Complexity via New Decomposition of Cliques, Discrete Applied Mathematics, 査読有, 166, 249-254, 2014.
DOI:10.1016/j.dam.2013.09.015

[学会発表](計9件)

天野 一幸, 多項式しきい値表現のXOR補題と整数計画のテンソル積, 日本OR学界最適化の基盤とフロンティア研究部会, 2016年4月23日, 東京理科大学(東京都新宿区)

Kazuyuki Amano, On XOR Lemma for Polynomial Threshold Weight and Length, The 10th International Conference on Language and Automata Theory and Applications (LATA16), 2016年3月15日, プラハ(チェコ共和国)

齊藤 惇, 天野 一幸, A Nonuniform Circuit Class with Multilayer of Threshold Gates having Super Quasi Polynomial Lower Bounds against NEXP, 電子情報通信学会総合大会 COMP-ELC 学生シンポジウム DS1-14, 2015年3月10日, 立命館大学(滋賀県草津市)

Atsushi Saito, Kazuyuki Amano, A

Satisfiability Algorithm for Some Class of Dense Depth Two Threshold Circuits, The 17th Korea-Japan Workshop on Algorithm and Computation, 2014年7月14日, 沖縄コンベンションセンター(沖縄県宜野湾市)

Kazuyuki Amano, Graph Partition and Communication Complexity, ELC Mini-Workshop on Boolean Functions, 2014年11月7日, 東京工業大学(東京都港区)

重田 真那美, 天野 一幸, Ordered Biclique Partitionと通信計算量, 2013年度冬のLAシンポジウム, 2014年1月29日, 京都大学(京都府京都市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

天野 一幸 (AMANO, Kazuyuki)
群馬大学・大学院理工学府・教授
研究者番号: 30282031