

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24500007

研究課題名(和文) 幅系グラフパラメータの近似困難性の研究

研究課題名(英文) Inapproximability of graph width parameters

研究代表者

山崎 浩一 (Yamazaki, Koichi)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：00246662

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：Small Set Expansion 予想の下で、rank, clique, carving, boolean-widthsなどの重要な幅系グラフパラメータに対し、定数近似困難性を示した。予定していたpath-distance-widthに関しては定数近似困難性を示す事は出来なかった。一方で、予定には無かったmaximum induced matching-widthというグラフパラメータに関して近似困難性が示せた。

副産物的に細帯グラフと呼ばれるグラフクラスに対しある無限階層の存在を示した。また、tangleと呼ばれるbranch-widthの双対概念に対しある代数的性質を示した。

研究成果の概要(英文)：The research shows that there are no polynomial time approximation algorithms with constant performance ratios for several graph width parameters such as rank-width, clique-width, carving-width, and boolean-width under Small Set Expansion conjecture. The inapproximability of path-distance-width, which was one of targets of the research, could not be clarified, but the inapproximability of maximum induced matching-width was serendipitously shown. We also obtained the following two results as a by-product: One is some result on an infinite hierarchy of thin strip graphs, the other is a result on algebraic property of tangle (a dual notion of branch-width).

研究分野：グラフアルゴリズム

キーワード：グラフパラメータ 近似困難性 Small Set Expansion 予想 rank-width clique-width boolean-width

### 1. 研究開始当初の背景

グラフ理論やグラフアルゴリズムの研究が果たす役割はコンピュータの発達とともに重要度を増している。これは、グラフが持つ表現能力の高さと、グラフで数値モデル化することで計算機を使って処理できる点に起因する。グラフを用いて工学的問題を数値モデル化した場合、そのモデル化されたグラフの集合(すなわちグラフクラス)がある特徴を持つ場合が多い。このグラフクラスの特徴を知ることは、効率の良いグラフアルゴリズムを設計する上で極めて重要である。

グラフ理論やグラフアルゴリズムにおいて、グラフの特徴を表すグラフパラメータの研究は重要で、そのようなパラメータは数多く存在する。中でも band-width (baw)、cut-width (cuw)、path-width (pw)、tree-width (tw)、rank-width (rw)、clique-width (clw)、carving-width (caw)、boolean-width (bow)、path-distance-width (pdw)などの「\*\*\*-width」という名前で表されるものは重要で、多くの分野に應用を持ち、グラフアルゴリズムの効率と深く関係している。本研究ではこれらを幅系(グラフ)パラメータと呼ぶ。

これら幅系パラメータの値の計算は NP 困難であることが古くから知られている。したがって、これら幅系パラメータに対して値を近似的に求める近似アルゴリズムの研究は古くからされている。それら研究結果の多くで「対数」近似可能性は報告されていた。一方で「定数」近似可能性または逆の困難性は未だ報告されておらず、baw に対しては定数近似困難性が知られていたものの、tw や pw などの定数近似困難性は(P NP 予想のような強く支持されている予想の下では)今現在も未解決のままである。しかながら(P NP 予想ほどの強い支持はないが) Small Set Expansion (SSE) 予想と呼ばれる予想の下では、cuw、pw や tw などの幅系パラメータに対しては、定数近似困難性が Austrin 等により 2011 年に示された：“Per Austrin, Toniann Pitassi, Yu Wu, Inapproximability of Treewidth, One-Shot Pebbling, and Related Layout Problems, arXiv:1109.4910, (Submitted on 22 Sep 2011)”。しかしながら、他の重要な幅系グラフパラメータである rw、clw、caw、bow、pdw などに対しては、SSE 予想の下でも定数近似困難性は示されていない。

### 2. 研究の目的

多くの幅系パラメータ同士はある程度の構造的な類似点を持つ。また、それら幅系パラメータの多くに対しては、未だ定数近似アルゴリズムは発見されていない。これらのことより、多くの幅系パラメータに共通した何らかの構造が存在し、その構造が定数近似を阻んでいることが考えられる。本研究では、この構造を明らかにする。また SSE 予想を仮

定し、幅系グラフパラメータで未だ近似困難性が示されていない、rw、clw、caw、bow、pdw などに対し、それらの定数近似困難性を明らかにする。

### 3. 研究の方法

本研究申請時の計画は以下の通りであった。SSE 予想は edge expansion と呼ばれる概念と関係し、それは edge boundary-width (ebw) というグラフパラメータと関係する。そのグラフパラメータは別のパラメータ vertex boundary-width (vbw) と関係し、これは tw などの下界をとっている。近似アルゴリズムの研究では良い下界に着目することが極めて重要であるため、先ず vbw と SSE 予想の関係を調査する。次に、brw、rw、caw、bow 等は 3 分導出木を使って定義されているため、よく似た構造的な性質を共通に持つ。この 3 分導出木もたらず構造的特徴が、定数近似困難性の一要因に成り得るかを調査する。幅系グラフパラメータの中で、baw と pdw は他のパラメータとやや異なる性質を有するようと思われる。そのため、他のパラメータと同様の方法で近似困難性が示せるか否かを調査する。

実際に行った研究方法は以下のとおりである。SSE 予想の下で cuw、pw や tw の近似困難性を示した P. Austrin 等の文献をヒントにし、vbw/ebw と SSE 予想の関係を調べた。Austrin 等の文献では tw の下界としてよく使われる balanced セパレータを使って、鳩ノ巣原理で証明しているが、本研究では代わりに vbw を使うことを試みた。結果的にはこの方法で成功したが、ポイントは SSE 予想で自然に現れる  $d$  正則グラフの  $d$  を定数として見なす点であった。SSE 予想に関する文献で、簡単化のためにインスタンスを正則グラフに制限しているものは少なくないが、しかし実質その制限は正則性にあって、定数性が利いている例を報告者は知らない。 $d$  を定数と見なす利点は、vbw と ebw を実質同じものとして扱える点にある。

Tw と branch-width (brw) は定数倍の差しかないため、brw の定数近似困難性が同時に示している。しかしながら brw と SSE 予想の直接的な関わりは明らかではなく、この関わりを明らかにするため、3 分導出木が SSE 予想にどう影響するかを考察した。結論としては、3 分導出木の 3 は近似困難性の証明の単純化に寄与することが分かった。この知見がきっかけで、同じ 3 分導出木構造を持つ rw の定数近似困難性が示された。Rw は clw の下界になっているため、直接的に clw の定数近似困難性も同時に示せたことになる。本研究で扱う幅系グラフパラメータは、あるパラメータが他のパラメータの下界になっている場合が多いため、下界と上界をうまく選ぶことで統一的な証明が可能となる。実際本研究では上界として cuw、下界として vbw、rw、及び maximum induced matching-width (mimw)

を採用している。Minw は 2012 年に紹介された新しい幅系グラフパラメータで、bow の下界になっていることが知られていた。よってこの事実より、直接的に bow の定数近似困難性も同時に示せたことになる。研究申請時当初はこのパラメータにはほとんど注目していなかったが、3 分導出木構造に着目した証明方法が確立したあたりから、次第に注目するようになった。

幅系グラフパラメータの中で、baw と pdw が他のパラメータとは異なるという直感 は研究申請時には既にあり、他のパラメータとは別の証明方法が必要になることは予想していた。具体的には、baw の定数近似困難性を示した方法と類似した方法を想定していた。

#### 4. 研究成果

SSE 予想の下で、rw、clw、caw、bow などの重要な幅系グラフパラメータに対し、定数近似困難性を明らかにすることが出来た。3 の「研究の方法」で述べたように、rw、clw、caw、bow に共通する 3 分導出木構造を SSE 予想のフレームワークに落とし込む事で、これらパラメータに対して定数近似困難性を示す事が出来た。Pdw に関しては定数近似困難性を示す事は出来なかったが、これは pdw の構造が他のパラメータと大きく異なることが原因である。一方で、予定には無かった mimw に関して定数近似困難性が示せた。このパラメータは 3 分導出木の構造を持ち、かつ bow の下界にもなっている。この下界を使うことにより bow の定数近似困難性を示す事が出来た。これらの結果を学会で発表した。本研究結果を得たのが最終年度末であったため、論文投稿が遅くなり、そのため本報告書作成時点では学術雑誌に投稿中のままである。

SSE 予想と vbw との関係性について研究を行ったが、その過程で vbw および ebw と極小セパレータの関連性を調べる必要性が生じた。この関連性を調べていく中で、極小セパレータが指数個出現するグラフ構造に着目するようになり研究を続けた。その結果、誘導マッチング数に関係するグラフパラメータ(ここでは擬似誘導マッチング数と呼ぶ)が極小セパレータを数多く作り出す構造に深く関係していることが分かった。これについて学会発表を行った。

本研究で pdw の構造解析を行う中で、副産物的に細帯グラフと呼ばれるグラフクラスに対してある種の無限階層が存在することが示せた。幾つかの幅系グラフパラメータに対し、鎖構造を持つグラフの族に対しては定数近似アルゴリズムが知られていた。定数近似を可能にする構造について理解を深めるため、鎖構造を持つ自然なグラフクラスについての考察を行った結果、(本テーマとは必ずしも直接的に関係はしないが)副産物的に計算幾何学的に興味深い(鎖構造を持つグラ

フの族に対する)問題を発見した。すなわち、限られた幅の中に単位円を埋め込み、そこでできる単位円交差グラフのクラスとその幅との間にどのような関係があるか?という問題である。この問題に対し、グラフの直径と独立点数との関係に着目することで、単位円交差グラフのクラスが無限の階層を持つことと、その結果から生まれる新しい幾何的問題を得た。この無限階層に関する結果の紹介とそこで生じた新しい問題について学会発表を行い、最終的にはこれらの結果は学術雑誌に掲載された。

また brw の構造解析をする中で、副産物的に tangle と呼ばれる brw の双対概念の代数的性質に気付いた。すなわち、極大イデアルを特徴付ける公理群と対応する(tangle に対する)公理群を用いて、tangle を特徴付けた。また、loose tangle が(極大とは限らない)イデアルとみなせることも示した。これらの結果を学会で発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

T. Hayashi, A. Kawamura, Y. Otachi, H. Shinohara, K. Yamazaki, Thin strip graphs, Discrete Applied Mathematics, 査読有, in press, DOI: 10.1016/j.dam.2015.01.018.

山崎浩一, 幅系グラフパラメータの近似について, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会信学技報, 査読無, vol.115, no.15, 2015, pp.9-13.

山崎浩一, Tangle とイデアル, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会信学技報, 査読無, vol.114, no.509, 2015, pp.61-64.

山崎浩一, Tangle とイデアルについて(計算理論とアルゴリズムの新潮流), 数理解析研究所講究録, 査読無, vol.1941, 2015, pp.37-40.

大館陽太, 河村彰星, 篠原英裕, 林貴史, 山崎浩一, 細帯グラフ, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会信学技報, 査読無, vol.114, no.19, 2014, pp.1-4.

長澤亮介, 加藤達也, 木野徹, 山崎浩一, 多項式個の極小セパレータを持つグラフクラスについて(理論計算機科学の新展開), 数理解析研究所講究録, 査読無, vol.1849, 2013, pp.91-95.

[学会発表](計 6 件)

山崎浩一, 幅系グラフパラメータの近似について, 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2015年4月23日, 東北大学青葉山キャンパス(宮城県・仙台市).

山崎浩一, Tangle とイデアル, 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2015年3月9日, 立命館大学 朱雀キャンパス(京都府・京都市).

山崎浩一, Tangle とイデアルについて, LA シンポジウム, 2015年1月29日, 京都大学 数理解析研究所(京都府・京都市).

大館陽太, 河村彰星, 篠原英裕, 林貴史, 山崎浩一, 細帯グラフ, 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2014年4月24日, 東北大学青葉山キャンパス(宮城県・仙台市).

山崎浩一, Tangle と極大イデアル, LA シンポジウム, 2014年1月29日, 京都大学 数理解析研究所(京都府・京都市).

長澤亮介, 加藤達也, 木野徹, 山崎浩一, 多項式個の極小セパレータを持つグラフについて, LA シンポジウム, 2013年1月29日, 京都大学 数理解析研究所(京都府・京都市).

〔その他〕

ホームページ等

Tangle 分布

<http://www.yamazaki-lab.cs.gunma-u.ac.jp/software/h26/tangle/soft.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 浩一 (YAMAZAKI, Koichi)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号: 00246662