

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 26 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2014

課題番号：24500008

研究課題名(和文)幾何図形の列挙に関する研究

研究課題名(英文)On the enumeration of geometric objects

研究代表者

堀山 貴史 (HORIYAMA, Takashi)

埼玉大学・情報メディア基盤センター・准教授

研究者番号：60314530

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,200,000円

研究成果の概要(和文)：BDD(二分決定グラフ)、ZDD(零抑制型BDD)や逆探索といった列挙の要素技術を統合し、幾何図形の列挙のためのアルゴリズム設計論について研究を行った。多面体の展開図については、フロンティア法に基づくZDD構築手法と同型な展開図の除去手法の組合せにより、高速な列挙ができることを示した。また、この展開図の列挙手法について、一般展開(辺のみでなく面を切り開くことも許した展開図)への拡張について考察した。さらに、任意の多面体に対し、個々の展開図を列挙することなく、本質的に異なる展開図の個数を求める手法を開発した。

研究成果の概要(英文)：The methodology for designing enumeration algorithms of geometric objects are discussed by integrating basic technologies (e.g., BDDs (Binary Decision Diagrams), ZDDs (Zero-suppressed BDDs) and reverse search). As for the enumeration of developments of polyhedra, the efficiency of the combined method with the frontier-based ZDD construction and a removal of isomorphic developments is shown. The extension of this method is discussed for enumerating general developments (i.e., developments obtained by cutting not only the edges but also faces) of polyhedra. Moreover, the counting method for essentially different developments of any polyhedron is proposed. We can count the number of non-isomorphic developments without enumerating the developments.

研究分野：計算幾何学

キーワード：アルゴリズム 列挙アルゴリズム 計算幾何学 展開図 多面体

1. 研究開始当初の背景

情報化社会の大規模化と多様化に伴い、その基礎を支えるアルゴリズムの設計と性能解析においても、従来からの主眼である「正確な計算を限られたメモリ量で速く」だけでなく、計算機が必要とされる場面に応じた新たな価値観を求められている。

列挙アルゴリズムは、ウェブの検索エンジンに代表されるように、与えられた制約条件を満たす解をただ一つだけではなく、すべて求めるための技術である。たとえば、データマイニングの分野では、大量のデータから有用な規則性やパターンを発見するために、頻出アイテム集合 (頻出集合) の列挙や、特定の性質を持ったグラフの列挙などが必要とされている。こうして、列挙アルゴリズムは、重要なパラダイムとして認識されてきている。

本研究で用いる要素技術の一つである BDD (Binary Decision Diagram: 二分決定グラフ) [Bryant, 1986] や ZDD (Zero-suppressed Decision Diagram) [Minato, 1993] は、有向非巡回グラフによる論理関数や組合せ集合の表現法であり、計算機援用 VLSI 設計・検証の分野で 1980 年代後半より盛んに用いられてきた。近年、D. E. Knuth の世界的名著 "The Art of Computer Programming" にて詳細に取り上げられ、他分野からも広く注目を集めている。日本では、JST ERATO 湊離散構造処理系プロジェクトが 2010 年より開始された。

2. 研究の目的

本研究の主題は、まず、理論計算機科学、人工知能、計算機援用 VLSI 設計などの各分野においてそれぞれ独自に形成されてきた列挙のための要素技術を統合し、幾何図形の列挙を行うことである。また、こうした列挙のための要素技術を融合し、列挙アルゴリズムの設計に新たな指針を与えることを目的とする。

列挙技法の一つとして、逆探索 [Avis, Fukuda, 1996] を用いる。列挙対象の間に親子関係のルールを定義し、親の親の親...とたどることで共通の祖先に一意にたどり着けるようにルールを定めることで、子親の関係による木構造 (家系木と呼ばれる) が列挙対象の上に導かれる。逆に、家系木の根を出発点として、親子の関係により家系木を順にたどることで、列挙対象をすべて列挙することができる。ルールに従って次の列挙対象を求めることができるため、列挙対象の持つ性質を明晰な形でルール化する必要があるが、少ない計算時間と少ない計算領域で列挙を実行することができる。

また、列挙には、BDD や ZDD も用いる。等価な部分グラフの共有によるコンパクトな圧縮データ表現であるとみなせ、節点管理

ハッシュや演算キャッシュにより圧縮データに対する高速な演算処理が可能となる。計算機援用 VLSI 設計・検証の分野で、SAT (論理式の制約充足問題) solver の利用と共に基礎的な技術となっている。また、近年では、データマイニングでの頻出集合列挙やベイジアンネットの解析など様々な分野で広く用いられるようになってきている。

これらの要素技術を用い、中心的な研究テーマとして、多面体の展開図の列挙、タイリングの列挙に取り組むとともに、そこで培われたアルゴリズム設計技法を幾何図形の列挙へと広く応用する。

3. 研究の方法

多面体の展開図の列挙において、まず、半正多面体 (2 種類以上の正多角形の面のみからなる凸多面体) の展開図の列挙に取り組む。これは、正多面体の展開図の列挙に関する研究になぞらえて進める。正多面体の展開図の種類は、正四面体が 2 種類、正六面体と正八面体が 11 種類、正十二面体と正二十面体が 43,380 種類あることが、行列の数え上げ手法により求められた [Hippenmeyer, 1979]。研究代表者らは、BDD を利用して展開図の列挙を行うことで、正多面体の展開図に重なりがないことを証明した [Horiyama ら, 2011]。これは、(1) 展開図になるための制約条件 (開切辺は頂点数-1 本、また開切辺がサイクルを持たない) を BDD で表す、(2) 同型性を排除する、(3) 開切辺の情報をもとに展開図を作成する、の順に進めた。

半正多面体に関しては、サッカーボール/フラレン形状として知られる切頂二十面体について、展開図が 375,291,866,372,898,816,000 種類あることが知られている [Brown ら, 1991] [John ら, 1993]。本研究では、まず、この手法を利用し、他の半正多面体 12 種類について、展開図が何種類あるかを計算する。なお、この手法は、同型性を排除する前の状態で何種類あるかを計算するものである。

次に、上記の正多面体の展開図の列挙 (1) の手法を応用して、同型性を排除する前の状態で、半正多面体の展開図の ZDD を求める。ただし、切頂二十面体の展開図の種類が前出の通り巨大であることから、この ZDD の作成途中の節点数が爆発的に大きくなり、求められないことが予想される。このため、JST ERATO 湊離散構造処理系プロジェクトと連携して開発した ZDD 構築フレームワークであるフロンティア法の適用を検討する。従来手法では、満たすべき複数の制約条件を表すそれぞれの ZDD を作ってその論理積を取るため、その途中で節点数が爆発的に大きくなるが、フロンティア法では ZDD を直接構築するため、より少ないメモリ量で、より高速に構築を行う事ができる。展開図の列挙 (2) の同型性の排除は、正多面体の実験では (1)

よりも多大なメモリ量を要したため、半正多面体でも同様に適用できるものと適用できないものを峻別する必要がある。

タイリングの列挙においては、 p_3 タイリングを取り上げ、逆探索により p_3 タイリング可能なポリアモンドおよびポリヘックスを列挙するアルゴリズムの設計と実装を行う。タイリングは、基本図形に平行移動や回転、すべり鏡映の操作を繰り返すことで、隙間なく重なりなく平面を敷き詰めることをいう。タイリングは芸術における重要なモチーフの一つであり、アルハンブラ宮殿の壁面装飾やエッシャーの絵画、正倉院裂などのデザインに繰り返し模様として見られる。また、芸術だけでなく、壁紙やカーテンなどの工業デザインにおいてもタイリングは重要な役割を果たしている。したがって、基本図形の列挙は、計算機によるデザイナーの知的支援に有益である。

ポリオミノ、ポリアモンド、ポリヘックスは、それぞれ複数の単位正三角形、単位正方形、単位正六角形の辺同士を接続してできる図形である。研究代表者は、 p_4 , p_6 タイリングについて、逆探索による列挙を提案している [Horiyama ら, 2009, 2010]。逆探索により計算時間と計算領域の削減が可能となる。

本研究では、 p_3 タイリング可能な基本図形の列挙のために、 p_4 , p_6 タイリングにおける知見を利用する。逆探索を利用したアルゴリズムの設計は、(1) 家系木の根の図形の設計 (2) 子 親のルールの設計 (3) 親子のルールの設計の順に進める。 p_3 タイリングの基本図形は、ポリアモンドとポリヘックスである。ポリアモンドは、 p_6 タイリングの基本図形としても考察したため、(1) ~ (3) の各ステップの設計は比較的容易であると思われる。ポリヘックスについては、新規の設計が必要であるが、六角形1つを三角形が6個組み合わせ合わせた図形と見ることで設計できるのではないかとと思われる。なお、 p_6 タイリングの列挙において、(2) と (3) では p_6 タイリング特有の性質を利用したルールを追加する必要があったため、 p_3 タイリングの列挙アルゴリズムでも同様の対応が必要かを慎重に検討する必要がある。

4. 研究成果

多面体の展開図の列挙については、(1) 辺にラベルが付いているとしてその切り開き方を示した辺ラベル付き展開図を求める、(2) 同型な展開図を排除して本質的に異なる展開図のみを求める、の2ステップの手順をとる。正多面体の展開図の列挙において、(1) 展開図になるための制約条件 (開切辺は頂点数-1本、また開切辺がサイクルを持たない) をZDDで表す、(2) 同型性の制約条件 (同型な置換による辺ラベルの入れ換え) をZDDで表して (1) のZDDと結合、との手

法を用いたが、これが一般の多面体に対しても適用可能であることを確認した。また、フロンティア法を適用すれば (1) を高速に実行できることを示した。

さらに、フロンティア法に基づく手法において、実行途中でノード爆発を起こしてメモリが足らなくなることがある。これに対処するため、個々の展開図を列挙することなく、同型なものを除去した展開図の個数を求めるアルゴリズムを開発した。この手法では、まず多面体の持つ対称性をすべて列挙し、それぞれの対称性ごとに頂点の軌道が描く quotient graph を解析する。軌道の位数と quotient graph のラベル付全域木の個数をもとに、その対称性のもとで相異なる展開図の個数を求め、その総計から同型な展開図を除去した展開図の個数を得ている。

また、扱う展開図を、これまでに扱ってきた辺展開 (辺を切り開くことで得られる展開図) から、一般展開 (辺のみでなく面を切り開くことも許した展開図) へと広げるために、以下の2つの手法を開発した。まず、正四面体の一般展開について、展開図が p_2 タイリング (180度回転による平面敷き詰め) 可能であることが必要十分条件であることを利用した。すなわち、与えられた多角形が p_2 タイリング可能であるかを判定することで、正四面体の一般展開であるかの判定を行った。これにより、整面凸多面体の辺展開と正四面体の一般展開の関係を調べ、ただ2種類のジョンソン立体のみが正四面体と共通の展開図を持つことを示した。また、直方体の面を単位正方形の集合として扱い、単位正方形の辺ならば (もとの多面体の面上でも) 切り開くことを許した展開を定義し、その定義の元で展開図の列挙手法を開発した。

タイリングの列挙については、 p_4 タイリング (90度回転によるタイリング) を取り上げ、逆探索により p_4 タイリング可能なポリオミノ (複数の単位正方形を辺々接着した平面図形) を列挙するアルゴリズムの設計と実装を行った。(1) 家系木の根の図形の設計、(2) 子 親のルールの設計、(3) 親子のルールの設計と、逆探索に基づく3ステップの設計を行った。また、アルゴリズムの健全性と完全性の証明を行うことで、理論的な性能保証を与えた。また、これまでの回転によるタイリングのみでなく、鏡映とすべり鏡映によるタイリングである pmg タイリングについても逆探索に基づくアルゴリズムを設計した。

研究成果を広く社会に還元するために、以下のアウトリーチ活動を行った。

(1) 情報オリンピック日本委員会と連携して、情報オリンピック夏季セミナーにて、高校生を対象に列挙アルゴリズムに関するセミナーを行った。(2014年8月)

(2) 科学研究費補助金 新学術領域「多面的アプローチの統合による計算限界の解明」と連携して、一般を対象に、2回のサイエン

スカフェを行った。(2013年11月, 2015年3月)

(3) JST ERATO 湊離散構造処理系プロジェクトと連携して、技術者や一般を対象に、書籍「超高速グラフ列挙アルゴリズム フカシギの数え方 が拓く、組合せ問題への新アプローチ」(森北出版)を出版した。(2015年4月)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

D. Xu, T. Horiyama, T. Shirakawa, R. Uehara, Common Developments of Three Incongruent Boxes of Area 30, Lecture Notes in Computer Science, 9076, pp. 236-247, 2015. (査読有)

Y. Araki, T. Horiyama, R. Uehara, Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, Lecture Notes in Computer Science, 8973, pp. 294-305, 2015. (査読有)

T. Horiyama, M. Kiyomi, Y. Okamoto, R. Uehara, T. Uno, Y. Uno, Y. Yamauchi, Sankaku-Tori: An Old Western-Japanese Game Played on a Point Set, Lecture Notes in Computer Science, 8496, pp. 230-239, 2014. (査読有)

Z. Abel, E. D. Demaine, M. L. Demaine, T. Horiyama, R. Uehara, Computational Complexity of Piano-Hinged Dissections, IEICE Trans. Fundamentals, E97-A, pp. 1206-1212, 2014. (査読有)

J. Chun, T. Horiyama, T. Ito, N. Kaothanthong, H. Ono, Y. Otachi, T. Tokuyama, R. Uehara, T. Uno, Base location problems for base-monotone regions, Theoretical Computer Science, 555, pp. 71-84, 2014. (査読有)

T. Horiyama, W. Shoji, The Number of Different Unfoldings of Polyhedra, Lecture Notes in Computer Science, 8283, pp. 623-633, 2013. (査読有)

J. Chun, T. Horiyama, T. Ito, N. Kaothanthong, H. Ono, Y. Otachi, T. Tokuyama, R. Uehara, T. Uno, Base location problems for base-monotone regions, Lecture Notes in Computer Science, 7748, pp. 53-64, 2013. (査読有)

T. Horiyama, T. Ito, K. Nakatsuka, A. Suzuki, R. Uehara, Packing Trominoes is NP-Complete, #P-hard and ASP-Complete, Proc. of the 24th Canadian

Conference on Computational Geometry, pp. 219-224, 2012. (査読有)

X. Man, T. Horiyama, S. Kimura, Automatic Multi-Stage Clock Gating Optimization Using ILP Formulation, IEICE Trans. Fundamentals, E95-A, pp. 1347-1358, 2012. (査読有)

[学会発表](計 28 件)

K. Yamanaka, T. Horiyama, D. Kirkpatrick, Y. Otachi, T. Saitoh, R. Uehara, Y. Uno, Swapping Colored Tokens on Graphs, The Algorithms and Data Structures Symposium, University of Victoria, BC, Canada, 2015 (採択通知有).

D. Xu, 堀山貴史, 白川俊博, 上原隆平, 面積 30 の 3 つの箱の共通の展開図, 第 17 回折り紙の科学・数学・教育研究集会, 東京都文京区, JOAS ホール, 2014.12.14. 小林祐貴, 伊藤慈彦, 東川雄哉, 加藤直樹, 堀山貴史, 伊藤仁一, 奈良知恵, 空間充填立体 bar-joint フレームワークの最適なプレース追加手法, 電子情報通信学会コンピューテーション研究会, 熊本県熊本市, 崇城大学, 2014.12.5.

Y. Ito, K. Kobayashi, Y. Higashikawa, N. Katoh, T. Horiyama, J. Itoh, C. Nara, Optimally Bracing Frameworks of Space-Filling Convex Polyhedra, 17th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs, 東京都新宿区, 東京理科大学 神楽坂キャンパス, 2014.9.16.

Y. Araki, T. Horiyama, R. Uehara, Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, 情報処理学会, アルゴリズム研究会, 山形県米沢市, 伝国の杜, 2014.9.12.

堀山貴史, 一つ、二つ、たくさん ~ 列挙アルゴリズムの入門から応用まで ~ [招待講演], 情報オリンピック 夏季セミナー, 東京都渋谷区, 国立オリンピック記念青少年総合センター, 2014.8.26.

西岡潤, 堀山貴史, 逆探索に基づく pmg タイリングの列挙, 第 27 回路とシステムワークショップ, 兵庫県淡路市, 淡路夢舞台国際会議場, 2014.8.5

T. Horiyama, K. Adachi, Enumeration of All Paths between All Pairs of Vertices by Zero-Suppressed Binary Decision Diagrams, 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies, Barcelona, Spain, 2014.7.15.

T. Horiyama, M. Kiyomi, Y. Okamoto, R. Uehara, T. Uno, Y. Uno, Y. Yamauchi, Sankaku-Tori: An Old Western-Japanese Game Played on a Point Set, 7th

International Conference on Fun with Algorithms, Sicily, Italy, 2014.7.3.
荒木義明, 堀山貴史, 上原隆平, 正四面体が折れるジョンソン・ザルガラー立体の辺展開図について, 第 16 回折り紙の科学・数学・教育研究集会, 東京都文京区, JOAS ホール, 2014.6.22.

西岡潤, 堀山貴史, pmg タイリング可能なポリオミノの列挙, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 愛媛県松山市, 大和屋本店, 2014.6.14.

T. Horiyama, S. Yamane, Enumeration of p4 Isohedral Tiling Revisited, 7th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting, Hangzhou, China, 2014.5.17.

堀山貴史, 清見礼, 岡本吉央, 上原隆平, 宇野毅明, 宇野裕之, 山内由紀子, 三角取りの多項式時間解法と NP 完全性の研究, 第 9 回組合せゲーム・パズル研究集会, 石川県能美市, 北陸先端科学技術大学院大学, 2014.2.28.

堀山貴史, 古岡泰成, 正多面体の展開図のパッキング問題について, 第 9 回組合せゲーム・パズル研究集会, 石川県能美市, 北陸先端科学技術大学院大学, 2014.2.28.

T. Horiyama, S. Yamane, Enumerating Polyominoes of p4 Tiling Revisited, LA symposium, 京都府京都市, 京都大学, 2014.1.29.

瀧澤重志, 武知祥史, 大田章雄, 中野浩太郎, 加藤直樹, 井上武, 堀山貴史, 川原純, 湊真一, ZDD を用いた都市の避難所割り当ての列挙, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年秋季研究発表会, 徳島県徳島市, 徳島大学, 2013.9.11.

A. Takizawa, Y. Takechi, A. Ohta, N. Katoh, T. Inoue, T. Horiyama, J. Kawahara, S. Minato, Enumeration of region partitioning for evacuation planning based on ZDD, 11th International Symposium on Operations Research and its Applications in engineering, technology and management, Huangshan, China, 2013.8.23.

Z. Abel, E. E. Demaine, M. L. Demaine, T. Horiyama, R. Uehara, Computational Complexity of Piano-Hinged Dissections, 情報処理学会, アルゴリズム研究会, 北海道小樽市, 小樽商科大学, 2013.5.17.

Y. Hagiwara, T. Horiyama, Y. Uno, ZDD-Based Approach to Solve Tantrix, 6th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting, 宮城県松島市, 松島大観荘, 2013.4.20.

Z. Abel, E. D. Demaine, M. L. Demaine, T. Horiyama, R. Uehara, Computational Complexity of Piano-Hinged

Dissections, 29th European Workshop on Computational Geometry, TU Braunschweig, Braunschweig, Germany, 2013.3.19.

②① T. Horiyama, W. Shoji, The Number of Different Unfoldings of Polyhedra, 29th European Workshop on Computational Geometry, TU Braunschweig, Braunschweig, Germany, 2013.3.19.

②② J. Chun, T. Horiyama, T. Ito, N. Kaothanthong, H. Ono, Y. Otachi, T. Tokuyama, R. Uehara, T. Uno, Base location problems for base-monotone regions, 7th International Workshop on Algorithms and Computation, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India, 2013.2.14.

②③ J. Chun, T. Horiyama, T. Ito, N. Kaothanthong, H. Ono, Y. Otachi, T. Tokuyama, R. Uehara, T. Uno, Algorithms for Computing Optimal Image Segmentation using Quadtree Decomposition, Thailand-Japan Joint Conference on Computational Geometry and Graphs, Srinakharinwirot University, Bangkok, Thailand, 2012.12.6.

②④ T. Horiyama, T. Ito, K. Nakatsuka, A. Suzuki, R. Uehara, On the Complexity of Packing Trominoes, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 宮城県仙台市, 東北大学, 2012.10.31

②⑤ 堀山貴史, 多面体の展開図の列挙と索引化について, 学習理論における組合せ論ワークショップ, 福岡県福岡市, 九州大学, 2012.9.18.

②⑥ T. Horiyama, T. Ito, K. Nakatsuka, A. Suzuki, R. Uehara, Packing Trominoes is NP-Complete, #P-Complete and ASP-Complete, LA Symposium, 京都府宮津市, 宮津ロイヤルホテル, 2012.7.19.

②⑦ 堀山貴史, 庄子亘, 多面体の非同型な展開図の個数について, 情報処理学会, アルゴリズム研究会, 愛媛県松山市, 愛媛大学, 2012.5.14.

②⑧ T. Horiyama, W. Shoji, The Number of Edge Unfoldings of the Archimedean Solids, 5th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting, Fudan University, Shanghai, P.R.China, 2012.4.21.

〔図書〕(計 1 件)

堀山貴史, 社会のさまざまな問題への応用, 湊真一編, 超高速グラフ列挙アルゴリズム フカシギの数え方が拓く, 組合せ問題への新アプローチ, 8 章, 84-99, 森北出版, 2015.

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

堀山貴史（HORIYAMA, Takashi）

埼玉大学・情報メディア基盤センター・准教授

研究者番号：60314530

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし