様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 　３ 日現在

機関番号： ３２６６０
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４５０００２２

研究課題名（和文） 誤差を含む代数問題に対する数値数式融合計算の研究

研究課題名（英文） On the Study of Symbolic-Numeric Computation for Algebraic Problems with Empirical Data

研究代表者

関川　浩（SEKIGAWA, HIROSHI）

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：００３９６１７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,100,000円

研究成果の概要（和文）：多項式の係数などのデータが誤差を含む代数問題について、数値数式融合計算を用いた信頼性が高く効率的な計算方式を提案した。主な成果は以下である。(1) 連立代数方程式について解の種々の性質を保つような係数の摂動限界の計算アルゴリズム。(2) 複数の代数方程式から一番近く、指定された解を持つような代数方程式を構成するアルゴリズム。(3) 安定化理論の新しい利用法。

研究成果の概要（英文）：We proposed highly reliable symbolic-numeric computation methods for algebraic problems with empirical data. Some main results are as follows. (1) Algorithms to compute perturbation bounds for preserving properties of solutions of a polynomial system. (2) An algorithm to compute the nearest polynomial to multiple given polynomials with a given zero. (3) A new application of stabilization techniques.

研究分野： 計算代数

キーワード： 多項式　代数方程式　誤差　近似　摂動　数値数式融合計算　安定化理論

１．研究開始当初の背景

計算機による数値や数式の計算には、数値計算と数式処理と呼ばれる二つの種類がある。現在、科学技術計算には数値計算を用いるのが主流である。その理由として、数式処理は正確な計算を用いるため計算量が多いこと、また、入力データは正確であり誤差は含まれないという前提でアルゴリズムを構築しているため（たとえば、アルゴリズム中に等号判定が存在）、観測や計測により得られた数値、あるいはそれから計算された数値などの誤差を含むデータを入力とする代数問題の場合、計算結果が本来の結果から掛け離れたものになる恐れがあることが挙げられる。後者の理由について、具体的に多項式の整除性を例に説明する。$f=x-a$、$g=x-b$ とする。もし、a、b ともに正確な値なら、f が g で割り切れるか否かは簡単に判定できる（割り切れることと $a=b$ は同値）。したがって、a、b が正確な値で $a\neq b$ の場合、f は g で割り切れない。また、a、b が誤差を含む場合でも、たとえば $a=1.1$、$b=1.0$ であって誤差が十分に小さければ $a\neq b$ と結論でき、f は g で割り切れることはない（ただし、誤差が大きく、たとえば $|a-1.1|<0.2$、$|b-1.0|<0.2$ の場合、$a=b$ が成り立つ場合も成り立たない場合もあるため、どちらとも判定できない）。このように、注目している性質に関し、誤差が十分に小さければ曖昧性なく計算が可能で結論が出る場合を、以下、安定な場合と呼ぶ。しかし、a、b が誤差を含む場合で、たとえば、a, b ともに 1.0 のときは、どんなに誤差が小さくても $a=b$ となる可能性も $a\neq b$ となる可能性もあるから、割り切れるともそうでないとも判定できない。このような場合を以下、不安定な場合と呼ぶ。不安定な場合は「a、b を誤差範囲内でうまく選べば f が g で割り切れるようにできるかどうかを判定する」といった適切な解釈を与え、新たな問題を設定することにより意味のある計算が可能となる。

このように新たな問題を設定することは、数値計算のとくに線形代数の分野で以前より研究されており、数値線形代数という分野が確立している。

２．研究の目的

本研究の目的は、線形代数にとどまらず、多項式や代数方程式に関わる問題を含め広く代数問題を取り上げ、その問題が誤差を含む場合（多項式や代数方程式の係数が誤差を含む場合）に、数式処理を基本とし数値計算を援用する数値数式融合計算を用いた、信頼性が高く効率的な計算方式を確立することにある。

３．研究の方法

数式処理において、グレブナ基底に関する研究は、ここ 30 年程、数式処理研究の中心をなす話題であった。そこで、本研究では、係数に誤差を含むような多項式系に対するグレブナ基底、すなわち、近似グレブナ基底に対して数値数式融合計算を用いた信頼性の高い計算方式を確立することを最終的な目標とする。実際には、まず、近似グレブナ基底に関する研究の準備となる代数問題を選び、研究を進めた後、最終目標である近似グレブナ基底に対する研究を行うこととした。各代数問題に対しては、以下の三つの課題に分けて研究を進めた。

【課題１】問題の安定性を理論的に見極め、安定な場合は安定性解析（どこまで係数が変動しても着目している性質が保たれるか）の問題を、不安定な場合は問題の適切な解釈を与えて新しい問題を設定する。

【課題２】課題１で設定した問題を解くアルゴリズムを、数式処理を基本として構築する。

【課題３】課題２において構築したアルゴリズムを効率化する。さらに、入力されるクラスを限ることにより、より効率のよいアルゴリズムを構築する。

４．研究成果

(1)（課題２）$\boldsymbol{n}$ 変数複素係数多項式 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ が与えられているとする。このとき、連立代数方程式 $\boldsymbol{f}_1=\cdots=\boldsymbol{f}_n=0$ について、$\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ の係数をどれ程動かすと、どの変数の値もゼロではない解の個数が変化するか、その限界を計算する問題は、BKK（Bernshtein、Kushnirenko、Khovanskii）限界の等式が成り立つ条件を用いてより簡単な問題に帰着できることは以前に示していたが、帰着した問題を解くアルゴリズムはまだ与えていなかった。今回、帰着した問題を有理関数の最小化の問題として書き直し、最適化の手法を用いて解くアルゴリズムを示した。以前に指摘した通り、このアルゴリズムは一種の近似グレブナ基底を求めるアルゴリズムと見ることができる。

(2)（課題１、２）一変数実係数多項式 $\boldsymbol{f}$ と実区間 $\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{I}$ に重複零点を持たない）に対し、無限大ノルムで測って $\boldsymbol{f}$ に一番近く $\boldsymbol{I}$ に重複零点を持つ一変数実係数多項式 $\boldsymbol{g}$ を求める問題について、$\boldsymbol{g}$ は多項式時間で計算可能であることを示し、さらに、この結果の応用として、一変数実係数多項式 $\boldsymbol{f}$ と実区間 $\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{I}$ に重複零点を持たない）に対し、$\boldsymbol{I}$ 内にある零点の数を保つような、$\boldsymbol{f}$ の係数の摂動限界を評価する方法を提案した。応用上、係数に誤差のある方程式の根が実であるか否か、また実根が与えられた区間にいくつ存在するかが問題となる場面があるが、本成果はそのような場合に利用可能なものである。

(3)（課題１、２）最小包囲正方形問題（与

えられた点をすべて含む最小の正方形を求める問題）に、正方形の辺がすべて座標軸と平行であることと、という制限を加えた問題、およびその高次元化である最小包囲超立方体問題に、超立方体の辺がすべて座標軸と平行であること、という制限を加えた問題を解くアルゴリズムを提案し、それを利用して、複数の代数方程式から一番近く、指定された解を持つような代数方程式を構成するアルゴリズムを提案した。

(4) （課題３）課題３における主要な計算手段である安定化理論について、最短ベクトル問題を解く LLL アルゴリズムに適用した実験結果を整理し、係数が無理数である場合の有効性を確認した。また、安定化理論の利用法の一つである ISCZ 法（計算履歴を利用して正確な出力を得る手法）については、凸包構成に適用した計算機実験の結果を整理し、どのような場合に有効であるかを検討した。さらに、履歴保存と実数への復元のための新しい手法を提案し、最大公約式を求めるユークリッドの互除法、一変数代数方程式の実数解を数え上げるスツルムのアルゴリズムおよび一般逆行列を求めるグレビルのアルゴリズムに適用し、その有効性について検証した。

(5) （課題２）多項式 $\boldsymbol{f}$ の Euclid ノルムを $||\boldsymbol{f}||$ で表し、多項式 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ 間の距離を $||\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}||$ で定義する。$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{f}_0$ を与えられた実係数多項式、ただし、$||\boldsymbol{f}_0||=1$ とする。$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{f}_0\cdot\boldsymbol{g}_1$ を、$\boldsymbol{f}_0$ を因子とする $\boldsymbol{p}$ に一番近い多項式、$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_1\cdot\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{g}_1$ を、$\boldsymbol{g}_1$ を因子とする $\boldsymbol{p}$ に一番近い多項式、ただし、$||\boldsymbol{f}_1||=1$ かつ $\boldsymbol{c}_1>0$, $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{g}_2$ を、$\boldsymbol{f}_1$ を因子とする $\boldsymbol{p}$ に一番近い多項式、…としたとき、多項式列 $\{\boldsymbol{p}_j\}$、$\{\boldsymbol{f}_j\}$、$\{\boldsymbol{g}_j\}$、数列 $\{\boldsymbol{c}_j\}$ の性質は以前に解明していたが、実数係数の場合の結果を複素数係数の場合に拡張した。この性質は，$\boldsymbol{p}$ に近く因数分解可能な多項式を求める問題、すなわち、近似因数分解を求める問題に利用可能である。

(6) （課題１、２）ある種の量子フーリエ変換アルゴリズムの構成の一部に本研究の成果を利用した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① 関川　浩、複数の多項式に対する最近多項式、数式処理、査読無、Vol. 21、印刷中
② H. Sekigawa, A Sequence of Nearest Polynomials with Given Factors, Computer Mathematics: 9th Asian Symposium (ASCM2009), Fukuoka, December 2009, 10th Asian Symposium (ASCM2012), Beijing, October 2012, Contributed Papers and Invited Talks (Ruyong Feng, Wen-shin Lee, and Yosuke Sato (Eds.)), Springer, 査読有、2014, pp. 141－145
DOI: 10.1007/978-3-662-43799-5_12
③ H. Sekigawa, The Nearest Polynomial to Multiple Given Polynomials with a Given Zero, Proceedings of 2014 Symposium on Symbolic-Numeric Computation (SNC2014), 査読有、2014, pp. 144－145
DOI: 10.1145/2631948.2631975
④ 伊井　誠和、白柳　潔、安定化手法の発展形 ISCZ 法におけるシンボルリストの新しい評価法、京都大学数理解析研究所講究録、査読無、No. 1907、2014、pp. 71－79
⑤ Y. Kawano and H. Sekigawa, Quantum Fourier Transform over Symmetric Groups, Proceedings of 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2013), 査読有, 2013, pp. 227－234
DOI: 10.1145/2465506.2465940
⑥ 関川　浩、白柳　潔、連立代数方程式の解の個数を保つ摂動限界、数式処理、査読無、Vol. 19、No. 2、2013、pp. 37－40
⑦ H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Maximal Perturbation for Preserving the Number of Solutions of a Polynomial System, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, 2012, Vol. 46, No. 3, pp. 120－121

〔学会発表〕（計１５件）

① 見田　大志、白柳　潔、安定化手法の発展形 ISCZ 法の一般逆行列への適用、日本数式処理学会合同分科会、2015 年 1 月 23 日、山形大学（山形県・山形市）
② 永嶋　裕樹, 白柳 潔、最短ベクトルアルゴリズムの安定化について、日本数式処理学会合同分科会、2015 年 1 月 23 日、山形大学（山形県・山形市）
③ 永嶋　裕樹, 白柳 潔、安定化手法の最短ベクトルアルゴリズムへの適用について、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」、2014 年 12 月 24 日、京都大学（京都府・京都市）
④ 伊井　誠和, 白柳 潔、安定化手法の発展形 ISCZ 法のスツルムアルゴリズムへの適用と web アプリへの応用、京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」、2014 年 12 月 24 日、京都大学（京都府・京都市）
⑤ H. Sekigawa, The Nearest Polynomial to Multiple Given Polynomials with a Given Zero, 2014 Symposium on Symbolic-Numeric Computation

(SNC2014), 2014 年 7 月 30 日、上海（中国）

⑥ 関川　浩、複数の多項式に対する最近多項式、第 23 回日本数式処理学会大会、2014 年 5 月 31 日、徳島大学（徳島県・徳島市）

⑦ 小形　幸輝、関川　浩、制限付きの最小包囲正方形問題、Risa/Asir Conference 2014、2014 年 3 月 5 日、神戸大学（兵庫県・神戸市）

⑧ 伊井　誠和、白柳　潔、安定化手法の発展形 ISCZ 法におけるシンボルリストの新しい評価法、数式処理とその周辺分野の研究―Computer Algebra and Related Topics、2013 年 12 月 26 日、京都大学（京都府・京都市）

⑨ H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Computing a Perturbation Bound for Preserving the Number of Common Zeros of a Polynomial System, 18th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM2013), 2013 年 12 月 8 日，ムンバイ（インド）

⑩ K. Shirayanagi and H. Sekigawa, Interval-Symbol Method with Correct Zero Rewriting: Reducing Exact Computations to Obtain Exact Results, 18th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM2013), 2013 年 12 月 8 日，ムンバイ（インド）

⑪ Y. Kawano and H. Sekigawa, Quantum Fourier Transform over Symmetric Groups, 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2013), 2013 年 6 月 27 日，ボストン（米国）

⑫ 関川　浩、白柳　潔、連立代数方程式の解の個数を保つ摂動限界、Risa/Asir Conference 2012、2012 年 3 月 20 日、神戸大学（兵庫県、神戸市）

⑬ H. Sekigawa, Computing the Nearest Real Univariate Polynomial with a Real Multiple Zero and Its Application, 10th Asian Symposium on Computer Mathematics (ASCM2012), 2012 年 10 月 27 日、北京（中国）

⑭ H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Maximal Perturbation for Preserving the Number of Solutions of a Polynomial System, 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2012), 2012 年 7 月 23, 24 日，グルノーブル（フランス）

⑮ 関川　浩、白柳　潔、連立代数方程式の解の個数を保つ摂動限界、第 21 回日本数式処理学会大会、2012 年 6 月 10 日、山口大学（山口県・山口市）

〔図書〕（計１件）

① 白柳　潔、関川　浩　他、朝倉書店、応用数理ハンドブック、2013、685（344―345）

６．研究組織

(1)研究代表者

関川　浩（SEKIGAWA, Hiroshi）
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：00396178

(2)研究分担者

白柳　潔（SHIRAYANAGI, Kiyoshi）
東邦大学・理学部・教授
研究者番号：80396176