

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 16 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24500024

研究課題名(和文) Galois connectionをもつ部分構造論理の研究

研究課題名(英文) Substructural logic with Galois connection

## 研究代表者

近藤 通朗 (Kondo, Michiro)

東京電機大学・情報環境学部・教授

研究者番号：40211916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：直観主義的時相論理の決定可能性問題を一般化した形で解決するため、様相部分構造論理を代数的に考察した。部分構造論理の代数的意味論として剰余束を用い、この代数に様相演算子に対応する演算子を追加した代数系の性質を調べた。最初に1つの演算子を持つ体系の性質を調べ、その特徴付け定理を証明した。次に2つの演算子をガロア結合として持つ代数系の性質を調べ、直観主義的様相論理が決定可能であること、直観主義的時相論理が直観主義的様相論理のfusionであることを示した。これらの結果に、既知の結果(決定可能な論理のfusionはまた決定可能)を適用すると、直観主義的時相論理が決定可能であることが証明できた。

研究成果の概要(英文)：In order to solve the open problem "Is the Intuitionistic tense logic decidable?", we generalized the problem to that of substructural logic with Galois connection and considered algebraic properties of residuated lattices with Galois connection. At first we proved the characterization theorem of residuated lattices with an operator representing the modal operator. Next we considered properties of residuated lattices with two operators as Galois connection and proved that the intuitionistic modal logic was decidable. Moreover we also verified that the intuitionistic tense logic was a fusion of intuitionistic modal logics. It follows from a well-known result that a fusion of decidable logics is also decidable that our results give a proof that the intuitionistic tense logic is decidable, which was the open problem since at least 1984.

研究分野：数理論理学

キーワード：部分構造論理 剰余束 決定可能性 ガロア結合

### 1. 研究開始当初の背景

これまで、多値論理、線形論理、ファジイ論理やラフ集合論などにおいて、否定演算の問題や様相多値(ファジイ)論理の完全性定理、決定可能性問題などが、それぞれの分野で研究されてきた。本研究では、これをGalois connectionをもつ『部分構造論理』における問題ととらえ、統一的に考察し以下の問題を解決することを目的とする：

- (1) 部分構造論理に対応するcommutative residuated lattice (CRL代数)にinvolutiveな否定演算" $\sim$ "を新たに導入した代数の構造を決定すること。
- (2) 様相部分構造論理の完全性定理および、1984年以来未解決である2組のGCにFisher-Seviの公理を追加した直観論理の決定可能性問題を解決すること。

この問題に関する具体的な背景は次の通りである。

- (1) Involutiveな否定について：人工知能や制御理論で用いられているファジイ論理は命題の解釈を区間 $[0, 1]$ 上で行うものであり、重要なLukasiewicz logic, Gödel logic, product logicなどが提案され研究されてきた。Hajekはもっとも基本的な論理として、BL(Basic Logic)を提案し、その性質を考察した。BL代数は、束演算以外に $t$ -norm  $*$ をもち、この右随伴演算子として含意  $\rightarrow$  が定義されている。BLやEstevaらにより提案されたMTLでは、この新しく追加された演算 $*$ が連続(左連続)な $t$ -normで特徴付けられること、また、論理式  $A$  に対して  $A$  がBL(MTL)で証明可能 任意のBL(MTL)代数と任意の valuation  $v$  に対して  $v(A) = 1$  任意の線形なBL(MTL)代数と任意の valuation  $v$  に対して  $v(A) = 1$  が示され、BL(MTL)代数の研究は線形の

BL(MTL)代数のそれに帰着できることが明らかになった。Hartや小野による先行研究では、部分構造論理の枠組みの中で考察し、その代数的意味論としてCRL代数の研究を行っている。部分構造論理は本来 sequent 表現に基づくものであるが、CRL論理はalgebraizableであることから、より強力な代数的手法が可能である。

BL (MTL) において  $\neg x = x \rightarrow 0$  で定義される否定 $\neg$ は $t$ -norm  $*$  の性質に依存するため、involutiveではない。また上述の重要な論理(Lukasiewicz, Gödel, product 論理)やファジイ論理を用いた制御システムにおいて様々な問題が生じた。例えば、Lukasiewicz 論理では、involutive であるが、 $x \wedge \neg x = 0$ とはならず、「否定」と呼ぶには疑問である。一方、Gödel (product) 論理では、対応する否定は、 $x=0$ のとき $\neg x=1$ 、 $x \neq 0$ のとき $\neg x=0$ という、極端な「否定」となり制御で用いることが難しい。これを解決するため、Estevaらは6個の公理で規定される新たなinvolutive否定" $\sim$ "をBLに導入した。これにより、線形のBL代数であっても否定" $\sim$ "はうまく機能し、BLやその公理的拡張である論理に対する完全性定理など多くの問題が解決した。しかし、否定演算の公理の独立性の問題やBLよりも弱いIMTL、一般のCRL代数における表現定理などは未解決のままであった。これに対して、研究代表者は新しいinvolutiveな否定" $\sim$ "から定義される演算  $\rightarrow$  と元の $t$ -normから決まる否定 $\neg$ が、GCとなっていることを示し、さらに involutive CRL代数における否定公理の独立性の問題を解決した。

- (2) Galois connectionとなる様相演算子について：日常生活における意志決定は、多くの不完全な情報から知識や経験に基づき適切な情報を選択することと考えられる。すなわち、不完全なデータベースの部分集合(知識)に演算を施し、新たな部分集合(知識)を獲

得している．このような考察から，Pawlakは部分集合（知識）に演算を施し，新たな部分集合（知識）を獲得している．このような考察から，Pawlak は「ラフ集合」を提案した．現在では医学や工学，社会学，特に，データマイニング，画像処理などに応用され重要な分野となっている．数学的には，集合とその上の関係  $R$  から作られる演算子（「上近似」  $R^+$  および「下近似」  $R^-$ ）を用いて，部分集合（知識）  $A$  に，新しい部分集合（ラフ集合・知識）  $(R^-(A), R^+(A))$  を対応させることに相当する．Pawlak は  $R$  を同値関係として考え，その基本的な性質を考察した．

一方，これら「上近似」，「下近似」演算子と様相論理の「可能性」，「必然性」演算子との対応が明らかになり，様相論理からのアプローチが活発になされている．研究代表者は，ラフ集合における「上近似」，「下近似」演算が  $GC$  となっていることに着目し，上述(1)の否定演算の問題と同じく，Galois connection というキーワードで統一的に研究できることがわかった．これまでの研究で，研究代表者は（同値関係とは限らない）関係  $R$  から作られるこれらの演算子が  $GC$  となっている古典論理の場合，それが  $Kt$  と呼ばれる時相論理と同値であることを示した．関係  $R$  への条件の追加は，対応する公理の追加で得られ，古典論理の場合における問題が一挙に解決した．その後これを直観論理の場合に拡張し，1組の  $GC$  をもつ場合の代数的意味論およびKripke 意味論による完全性定理また決定可能性を示すことができた．その後，ポーランドやフィンランドの研究者との共同研究で，様相直観論理  $IK$  が  $R$ （および  $R^{-1}$ ）から作られる2組の  $GC$  をもつ直観論理にFisher-Servi の公理を追加した論理と同値であること，また，代数的意味論およびKripke 意味論による  $IK$  の完全性定理を証明した．しかし，この論理が決定可能であるかどうかは残念ながらわかっていない．この問題はEwald

による1984年の論文で証明されていたが，その証明にはギャップがあることがわかり，以前未解決のままである．これを解決することも目的の一つである．この問題の解決を図るとともに，もとなる論理（代数）を  $MTL$  や部分構造論理（ $CRL$  代数）に一般化し，普遍的でより多くの様相部分構造論理の性質を明らかにする．

## 2．研究の目的

多値論理，ファジイ論理などを『部分構造論理』として扱い，これに Galois connection（ $GC$ ）となる演算子を追加した体系の代数的研究を行い，以下の問題を解決することを目的とする：

(1) 部分構造論理に対応する commutative residuated lattice ( $CRL$  代数) に involutive な否定演算 “ $\sim$ ” を新たに導入した代数の構造を決定すること．

(2) 様相部分構造論理の完全性定理および1984年以来未解決である2組の  $GC$  に Fisher-Sevi の公理を追加した直観論理の決定可能性問題を解決すること．

## 3．研究の方法

上述の目的を達成するため，部分構造論理の代数的意味論を用いて研究を遂行した．この論理の代数的意味論としては， $MV$ -代数， $BL$ -代数など多くの代数系が提案され研究されているが，ここでは最も一般的であると考えられる剰余束（residuated lattices）を採用した．上述の  $MV$ -代数， $BL$ -代数などは，剰余束の特別な場合であることから，これまでの研究成果をすべて含む結果が得られることになる．そのためにも，演算を持つ剰余束による完全性定理を示した．このもとで，剰余束に様相や否定演算に対応する演算子

を入れ，その代数的性質を考察することで，様相（時制）部分構造論理の性質を調べた．

#### 4．研究成果

様相部分構造論理の性質を代数的な手法で調べるため，まず部分構造論理の代数的意味論として剰余束（residuated lattices）を考察し，この代数に様相演算子に対応する演算子を追加した代数系の性質を調べた．本研究課題においては，様相演算子としてガロア結合と呼ばれる演算子を追加した代数系の性質を調べ，最終的に，1984年以來未解決であった直観主義的時相論理の決定可能性の問題を次のように肯定的に解決した(a-e)．

a．直観主義的論理に一組のGC(Galois connection)を追加した体系(IntGC)の代数的意味論による完全性定理を証明し，それを用いてKripke意味論による完全性定理を証明した．

b．次にIntGCの決定可能性を証明した．(論文8)

c．直観主義的論理に2組のGCおよびFisher-Serviの公理を追加した体系(Int2GC)の代数的意味論およびKripke意味論による完全性定理を証明した．(論文3)

d．Int2GCが2組のIntGCのfusionであること  $\text{Int2GC} = \text{IntGC} * \text{IntGC}$ ，また，直観主義的時相論理と同値であること，

直観主義的時相論理 = Int2GC  
を証明した．(論文3)

e．このとき，既知の結果である「決定可能である2つの論理体系のfusionは，また決定可能である」を用いれば，最終結果として，直観主義的時相論理は決定可能であることが証明できた．

また，様相論理との関係が深い「強ガロア結合」と呼ばれる演算子が存在するための必

要十分条件を求め，強ガロア結合をもつ剰余束の特徴付け定理を得た．これに関する他の結果も含め，国際会議で発表し，さらにこの成果をまとめた形で学術雑誌に発表した．

(論文1,2)

#### 5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12件)

1. M. Kondo, On residuated lattices with universal quantifiers, Bulletin of the Iranian Mathematical Society (2015), in press

2. M. Kondo, Residuated lattices with Galois connections as monadic operators, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems (2015), in press

3. W. Dzik, J. Järvinen and M. Kondo, Characterizing intermediate tense logics in terms of Galois connections. Logic Journal of the IGPL vol.22 (2014), 992-1018

4. W. Dzik, J. Järvinen and M. Kondo, Representing expansions of bounded distributive lattices with Galois connections in terms of rough sets. Int. J. Approx. Reasoning vol.55 (2014), 427-435

5. M. Kondo, Characterization of extended filters in residuated lattices. Soft Comput. Vol.18 (2014), 427-432

6. M.F. Kawaguchi, M. Kondo, A correspondence between implicational fragment logics and fuzzy logics, Proc. Grc 2014, 127-130

7. J. Jarvinen, M. Kondo, J. Mattila and S. Radeleczki, Hidden modalities in algebras with negation and implication,

Mathematics for Applications vol.2 (2013),  
5-20

8. W. Dzik, J.Jarvinen and M.Kondo,  
Intuitionistic modal logic with a galois  
connection has the finite model property,  
Logic Journal of IGPL vol.21(2013),  
199-204

9. M.F. Kawaguchi, K. Minami and M. Kondo,  
Join Operations on Commutative  
BCK-Algebras with Condition (S), Proc.  
IEEE ISMVL 2013, 209-211

10. M. Kondo, Simple characterization of  
strict residuated lattices with an  
involutive negation, Soft Computing  
vol.17(2013), 39-44

11. M. Kondo and M.F. Kawaguchi, Modal  
Operators on Non-commutative Residuated  
Lattices, Proc. IEEE ISMVL 2012, 85-88

12. M. Kondo and E. Turunen, Prime Filters  
on Residuated Lattices, Proc. of IEEE  
ISMVL 2012, 89-91

〔学会発表〕(計 10件)

1. 近藤通朗, 非可換剰余束の商構造につい  
て, 第28回多値論理とその応用研究会,  
2015.1.10-1.11, てんぶす那覇, 沖縄
2. 近藤通朗, ファジイ構造におけるガロア  
結合子, 第37回多値論理フォーラム, 2014.  
9.13- 9.14, 関西大学, 吹田市(大阪)
3. 近藤通朗, 剰余束におけるガロア結合,  
第36回多値論理フォーラム,  
2014.1.10-1.12, 鹿児島大学, 鹿児島
4. M. Kondo, Some properties of strong  
Galois connections, 88th Arbeitstagung  
Allgemeine Algebra (AAA88),  
2013.6.20-6.22, Warsaw (Poland)
5. M.Kondo, Galois connection and  
relatively complete subalgebras of

residuated lattices, 87th Arbeitstagung  
Allgemeine Algebra (AAA87), 2014.2.7- 2.9,  
Linz (Austria)

6. M. Kondo, Characterization of monadic  
residuated lattices, 86th Arbeitstagung  
Allgemeine Algebra (AAA86),  
2013.5..31-6.2, Olomouc (Czech Republic)

7. M. Kondo, States on residuated lattices,  
85th Arbeitstagung Allgemeine Algebra  
(AAA85), 2013.1.31-2.2, Luxembourg  
(Luxembourg)

8. M. Kondo, States on bounded commutative  
residuated, 84th Arbeitstagung Allgemeine  
Algebra (AAA84), 2012.6.7 - 6.10, Dresden  
(Germany)

9. M. Kondo and M.F. Kawaguchi, Modal  
Operators on Non-commutative Residuated  
Lattices, IEEE ISMVL2012, 5.14-5.16,  
Victoria (Canada)

10. M. Kondo and E. Turunen, Prime Filters  
on Residuated Lattices, IEEE ISMVL2012,  
5.14-5.16, Victoria (Canada)

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

近藤通朗 (KONDO, Michiro)  
東京電機大学・情報環境学部・教授  
研究者番号: 40211916