様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：３２６７５
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５０００２５

研究課題名（和文）計算と論理に対する層論的構造解析の展開

研究課題名（英文）Sheaf structure in higher-order computaton and logic

研究代表者
倉田　俊彦（KURATA, Toshihiko）

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：４０３１１８９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：高階プログラミング言語における逐次的な計算評価の構造に関するモデルとして分配具象領域と呼ばれる順序集合が知られている．分配具象領域は既存の理論に基づく標準的なモデルの定義に３つの技巧的な条件を付加することによって実現されるが，今回の考察では，それら３条件が数学における層の構造に対応していることを示した．実際に，既存の理論に基づく特徴を層に組込むだけで分配具象領域と同等の枠組みが得られ，両者の間に双方向の翻訳関係が確立される．

研究成果の概要（英文）：The structure of distributive concrete domains is known to model the machinery of sequential evaluation of higher-order programming languages, which is obtained by incorporating three technical conditions into a naive structure of models based on the well-known theory of domains. In this respect, we show that these three conditions are comparable with the structure of sheaves studied in mathematics, and actually obtain a both-way translation between distributive concrete domains and sheaves endowed with a domain theoretical feature.

研究分野：プログラム意味論

キーワード：分配具象領域　高階逐次性　層論

１．研究開始当初の背景

プログラミング言語によって記述される様々な計算の意図は，実行時の言語処理系や計算機アーキテクチャに依存しない普遍的な概念として規定されるべきものである．これに対して，計算の持っている意味を数理的対象として解釈するための理論が研究されている．プログラムは社会基盤に直結した技術であると同時に，そのモデルの構成には特別な技術が必要とされるため，こうした研究は実用・理論の両面で不可欠な課題となっている．

高階プログラミング言語のモデルを構成するためには，カルテシアン閉圏と呼ばれる圏構造が必要不可欠であることが広く知られている．そのような圏の典型例は Sets（集合・関数の圏）であり，その中で，データ型は集合として，アルゴリズムは関数として意味が規定される．実際に，既存のモデルの殆どは，この圏 Sets に基づく概念によって構築されていて，具体的には，計算の連続性を組込むことによって Cpos（完備半順序集合・連続関数の圏）が，更に有限近似性を組込むことによって様々な領域の理論が確立されている．

こうした理論が大きな成功を収めている一方で，Sets に基盤をおいた静的な意味論では，圏の射（この場合は関数）の外延性から必然的に「入出力の関係が等しいプログラムには，計算の途中構造を無視して全て同じ意味が割り当てられる」といった非常に強い性質が強要されることとなる．実際に，計算量理論など，計算メカニズムの主要な興味はその内包的構造（答を算出するまでのプロセス）にあり，それらの違いを無視した解釈の枠組は適切とは言い難い．

この欠点を解消する既知の枠組は，PCF と呼ばれる単純型付ラムダ計算に対して「構文論的同等性に対応する完全不変量を単独のモデルとして実現する問題」に関するアプローチの中にのみ見出すことが出来る．この問題の解決には，PCF の計算評価プロセスに備わっている一種の逐次性や相互作用の構造を捉える動的な意味論の構築が要求されることとなり，実際に，PCF の計算における逐次性を捉えるモデルとして DCD（分配具象領域・逐次アルゴリズムの圏）が考案され，相互作用を捉えるモデルとしてゲーム意味論の枠組みを精密化した CA（計算アリーナ・イノセント戦略の圏）が考案される経緯に至った．

しかし，こうした考察の中から生まれた「計算の内包的構造を捉える動的な数理モデル」には，既存の数理概念から乖離した複雑な概念に依存せざるを得ない側面がある．そして，このような背景の下に，DCD や CA と独立した視点から高階プログラミング言語の静的意味論に伴う欠点を克服する試みの重要性が存在する．

２．研究の目的

本研究は計算・論理の数理的モデル理論に位置付けられ，既知のモデル概念に対して層構造に基づく様々な拡張を施し，これまで捉えることの難しかった繊細な情報に対して意味論的分析の視点を確立することを目標としている．

実際に，静的なモデルに基づくプログラム意味論に関して上に述べた不具合を解消するには，「射が外延性を持たないカルテシアン閉圏の構造」が必要不可欠となるが，そのような性質を持つ枠組みとして Sh(X)（位相空間 X 上の層・自然変換の圏）がある．そこで，本研究では Sets の代替構造として新たに Sh(X) を採用し，計算の内包構造まで捉えることが可能な新しいプログラム意味論の一般論の確立を試みる．

具体的な課題として，領域理論と層論の枠組みを融合することを目標としている．その際，最初に直面する課題は，Cpos と Sh(X) のように Sets からの独立した２つの拡張の流れを融合することになる．そして，この課題については，順序集合の層からなる圏 Cpos(X) の概念を考案し，「Cpos(X) がカルテシアン閉圏であること」や「Cpos(X) の中で様々な再帰データ構造の解釈が可能であること」といったプログラム意味論の枠組みとして理想的な特徴を示すことができている．そこで，更に，こうした性質を維持しながら，Cpos(X) に有限近似性を付加するアプローチを試み「領域の層」に基づくプログラム意味論を構築することを目標としている．

また，既存の動的な意味論の枠組みと層構造との関係を明らかにすることをもう一つの目標としている．具体的には，上に述べたように，考察対象は DCD や CA など「PCF の計算評価プロセスの意味論を実現する圏構造」に限定され，「これらが層概念の特殊化として説明できないか確認すること」を目標としている．

このように，プログラムの内包的構造に対して純粋数学の視点から統一的に説明する概念の構築により，既存のプログラム意味論に含まれる根本的な欠点の解消と，新たな視点に基づくより広い分野への波及効果が期待で

きる．その意味で，この問題は今回の研究の中で最も重要な課題と位置付けている．

また，理論計算機科学で重要な役割を果たす多様な論理（直観主義論理や様相論理など）の意味論として Kripke 構造が広く知られている．そこで，論理に関連する考察として，Kripke 構造をより一般的な層構造の視点から拡張して，様々な課題の要請にあった分析の枠組みを確立することも目標としている．（より具体的には，２階直観主義命題論理のモデルを中心にした分析を目的としている．）

通常の直観主義命題論理に関しては，Kripke 構造との間に厳密な対応関係をもつ束構造が知られているが，２階の体系においては Sobolev による Kripke 構造の概念のみが存在し，これに対応する束構造は知られていない．この不具合に対して，Sobolev の構造を層論の視点から捉え直し問題の解消を行っている．そして，その際に利用している位相空間と順序集合に関する双対性を更に一般化して，位相空間と完備束の対応理論の有効範囲を拡大することを具体的な目標としている．

３．研究の方法

以上のように，計算と論理において「層に基づく構造解析のアプローチ」が有効に機能する事例が考えられる．こうした並行性は両分野の間に存在する Curry−Howard 同型からも自然な現象と考えられ，これらの考察を同時に進めることによりその全体像を明らかにすることが出来ると考えている．そこで，計算と論理の考察に関する各課題を順番に解決していくことが研究の基本的なアプローチとなる．また，課題の性質上，各々の問題に関する結果が他の問題に対しても有益な情報を与える可能性が高いため，各考察の並行性を重視した計画を立てている．

領域理論と層構造の融合に関しては，Cpos を領域概念へ拡張する手法（有界完備性の付加など）が幾つか存在している．そこで，「こうした既存の手法の一つ一つを Cpos(X) 上に展開した時に，カルテシアン閉圏が得られるか」確認することが最初の課題となる．その上で，「領域の層が構成する圏の上で様々な再帰データ構造の解釈」を試みる．また，領域の層の概念が完成した段階の後は，その特徴を利用して有用なモデルの構成を行う方向に考察をシフトしていく．

既知の動的モデルと層構造の関係に関しては，特に，２つの圏 DCD と Sh(X) の関係に焦点を絞って，圏 DCD を層構造の視点から特徴付ける考察を進める．その鍵となる部分は「計算の逐次性を表現する際に必要とされる評価の位置概念」を層構造の中に見出すことであるが，「A. Bucciarelli and T. Ehrhard, A theory of sequentiality, Theoretical Computer Science 113, 1993」などで考案されている「分配具象領域と逐次アルゴリズムの抽象化」がその糸口を与えると考えていて，その周辺に集中して検討を行う．（この考察を，研究計画全体の中で最優先の課題と位置付けている．）

２階直観主義命題論理のモデルに関する課題に対して, Sobolev が導入した Kripke 構造は，アレクサンドロフ空間上に定義される特殊な層構造として捉えることが出来る．このアレクサンドロフ空間は，通常の Stone 双対性の適用範囲から外れたところに位置しているため，束論の中に対応概念を見つけることに困難が伴う．これに対して，Sobolev の Kripke 構造をより一般的な位相空間に基づく層構造の上に拡張して，より広い視点から束論と結びつけるアプローチを試みている．その過程で，アレクサンドロフ空間と代数的完備分配束との間で双対性が確立され，Sobolev の構造を束論的に捉えることが可能となった．そこで，こうした双対性の手法を何処まで一般化して広げることが出来るか確認していく．

４．研究成果

本研究における主要な課題として，既知の動的な意味論の枠組みを層概念の特殊化として捉えることが出来ないか確認することがある．この問題に対して，特に，高階プログラミング言語における逐次評価の構造に対する数理モデルとして提案された圏 DCD に注目して，層構造の視点から特徴付けを試みた．

圏 DCD の対象は分配具象領域と呼ばれる順序構造である．分配具象領域は領域理論の中で広く知られる DI−領域の構造に対して極めて技巧的な３条件を追加することによって実現されている．また，この順序構造には一種の表現定理が知られていて，任意の分配具象領域 D から，具象データ構造と呼ばれる計算情報の操作を表す構造 M_D を構成することが可能であり，「元の D は M_D 上に生成される一種の計算情報の集合とそれらの包含関係として表現することができる」ことが知られている．

これに対して，本研究では，(1) コンパクト開集合からなる基底を持つ，(2) 任意のコ

ンパクト開集合に対して，その部分集合となるコンパクト開集合が有限個しかない，という非常に限定された位相空間の上に定義される層で，更に（3）コンパクト開集合上のsection を全て集めた集合が可算である，という性質を満たすものに考察の焦点を限定した．（このような層を領域的層と呼ぶことにする．）すると，任意の分配具象領域 D に対しては，（具象データ構造 M_D を仲介することによって）領域的層の構造を抽出できることが証明できた．また，逆方向の変換として，任意の領域的層に対して，その section の構造から分配具象領域を抽出できることも証明できた．

以上の結果は，DCD に対応する層の圏（これを DSh と記述することにする）の対象を領域的層として特徴付けたこととなる．そして，対象の部分に限定して，DCD から DSh への変換 S と，DSh から DCD への変換 C を確立したこととなる．

領域的層に組み込まれた(1)-(3)の条件は，概ね DI-領域に要請される性質に対応するもので，この結果は「分配具象領域を得る際に DI-領域に組み込まれた技巧的な３条件」が層構造を記述する為に必要とされた条件であったことを示している．このことは，これまでの研究では知られていない事実であり，高階プログラミング言語の逐次評価の構造に関する新たな数学的な視点を与えている．

こうして得られた双方向の変換に関して，最初に確認したいことは「任意の分配具象領域 D に対して，圏 DCD の中で対象 D と $C\circ S(D)$ の同型を保証することができるか」という問題である．これについて，D と $C\circ S(D)$ が順序集合として同型となることを証明することができて，その結果から同型を保証する逐次アルゴリズムの存在を示すことも出来た．（現段階では，ここまで結果を数理解析研究所講究録に纏めている．）

今後に必要となる考察として，「逐次アルゴリズムの概念と正確に対応した概念として DSh の射の定義を確立すること」がある．この問題に関しては，section の対応の仕組みは判明していて，単純に層の準同型の概念と一致するわけではないことが分かっている．但し，研究目的の性質上，こうした対応を層論の中で使われる概念の組み合わせとして純粋に特徴付ける必要があり，この点が今後の課題となる．また，DSh の射の概念が確立された後で，更に，「任意の領域的層 F に対して，圏 DSh の中で F と $S\circ C(F)$ の同型を保証することができるか」確認して，２つの圏 DCD と DSh の同等性を完成させる必要がある．（このためには，領域的層の基礎となる位相空間にT_0-分離公理を要請する必要があることが分かっている．）

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 16 件）

① T. Kurata, On sheaves categorically equivalent to distributive concrete domains, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 掲載確定.

② K. Fujita, On styles of lambda2-terms --extended abstract--, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 掲載確定.

③ K. Fujita, R. Kashima, Y. Komori, and N. Matsuda, Reduction Rules for Intuitionistic $\lambda\rho$-calculus, Studia Logica, 査読有, 掲載確定.

④ Y. Komori, N. Matsuda, F. Yamakawa, A Simplified Proof of the Church-Rosser Theorem, Studia Logica Vol. 102, 査読有, 2014, pp. 175-183.

⑤ K. Fujita, A. Schubert, Existential type systems between Church and Curry style (type-free style), Theoretical Computer Science Vol. 549, 査読有, 2014, pp. 17--35. http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.019

〔学会発表〕（計 11 件）

① 倉田俊彦, On sheaves categorically equivalent to distributive concrete domains, RIMS研究集会「証明論・計算論とその周辺」, 2014年12月24日-12月26日, 京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）.

② 藤田憲悦, On styles of lambda2-terms, RIMS研究集会「証明論・計算論とその周辺」, 2014年12月24日-12月26日, 京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）.

③ 倉田俊彦, 分配具象領域と領域層の圏論的同等性に関する考察, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日-9月28日, 広島大学（広島県・東広島市）.

④ 鹿島亮, Semilattice relevant logic について, 日本数学会秋季総合分科会,

2014年9月25日-9月28日，広島大学（広島県・東広島市）.

⑤ 倉田俊彦，Sheaf-theoretical representation of concrete domains，日本数学会秋季総合分科会，2013年9月24日-9月27日，愛媛大学（愛媛県・松山市）.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

６．研究組織

(1)研究代表者
倉田　俊彦（KURATA, Toshihiko）
法政大学・経営学部・教授
研究者番号：４０３１１８９９

(2)研究分担者
古森　雄一（KOMORI, Yuichi）
千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・名誉教授
研究者番号：１００２２３０２

藤田　憲悦（FUJITA, Ken-etsu）
群馬大学・理工学研究院・准教授
研究者番号：３０２２８９９４

(3)連携研究者
鹿島　亮（KASHIMA, Ryo）
東京工業大学・情報理工学（系）研究科・准教授
研究者番号：１０２４０７５６