

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：32630

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24500347

研究課題名(和文) 定量的リスク管理のための統計的モデリングと手法の研究

研究課題名(英文) Research on Statistical Modeling and Methods for Quantitative Risk Management

## 研究代表者

塚原 英敦 (TSUKAHARA, Hideatsu)

成城大学・経済学部・教授

研究者番号：10282550

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,100,000円

研究成果の概要(和文)：歪みリスク尺度のクラスは、期待ショートフォールを特殊例として含む、望ましい性質を持つクラスである。我々は時系列データに基づく歪みリスク尺度の自然な推定量を提案し、その強一致性と漸近正規性を示した。さらに、漸近分散の一致推定量を構成し、ブートストラップ法を用いたバイアス修正法を論じた。また、歪みリスク尺度に対する簡単なバックテスト法を提案・検討し、オイラー資本配賦を計算した。

経験接合関数の平滑化である経験ベータ接合関数を考案した。それは平滑化パラメータが要らず、サンプリングも極めて簡単であるという長所をもつ。経験ベータ接合関数の漸近論を証明し、モンテカルロによる数値実験でその有効性を示した。

研究成果の概要(英文)：The class of distortion risk measures is a wide class with many desirable properties, and includes the renowned expected shortfall. We constructed a reasonable and natural estimator of distortion risk measure based on general weakly dependent times series data, and proved that it is strongly consistent and asymptotically normal. Furthermore we gave a consistent estimator for its asymptotic variance, and discussed bias correction methods using bootstrap methods. We also suggested a simple backtesting procedure for the distortion risk measure, and computed the Euler capital allocation based on them with some numerical implementation.

We proposed a new version of smoothed empirical copula, called the empirical Beta copula. It has the advantage of not requiring any smoothing parameter, and it is extremely simple to simulate a sample from it. We showed asymptotic results on the empirical Beta copula and studied its finite-sample properties with Monte Carlo simulation.

研究分野：統計科学

キーワード：リスク管理 計量ファイナンス 統計的手法

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 統計学・金融工学の理論的道具を用いてリスクをやり繰りする定量的リスク管理という分野において、リスク計測とは、過去の観測値に基づき、具体的なモデルを前提として、ポジションの将来価値の分布、あるいはその汎関数に対する統計的推定値を計算することと定義される。そして、損失を表す確率変数のリスク量を測るのがリスク尺度である。市場リスク尺度として業界標準となったバリュー・アット・リスク (VaR) は損失分布の分位点に他ならないが、これまでのリスク尺度の研究によりその理論的欠陥が明らかにされた。

(2) その VaR に代わるリスク尺度として登場した期待ショートフォールを含む一般的なクラスとして歪みリスク尺度が注目を浴びてきたが、筆者はその 1 パラメータ族を提案・比較分析し、法則不変性の帰結や確率順序の保存性を示した。また、データが i.i.d. 系列の実現値である場合に、歪みリスク尺度の推定量 (L 統計量) の漸近的な性質を研究した。

(3) また、統計モデルとして、測定対象となるリスクの背後にあるリスク要因間の従属性を接合関数 (コピュラ) を用いてモデリングするというアプローチが一部で人気を集め、その理論的な基礎を確かにする必要性が高まっていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、これまで研究してきたリスク計測手法に基づき、定量的に金融リスクを管理するために必要な統計モデルとデータ分析手法を開発・検討することである。

(1) 金融時系列データと多変数変量間の相互依存性を接合関数によってモデリングすると同時に、時系列的従属性を考慮に入れたダイナミックなモデルを離散時間・連続時間の両方で検討する。また、リスク要因間にいくつかの異なる接合関数を想定したモデルにおいてリスク尺度の感応度・頑健性を検討する。

(2) 歪みリスク尺度に基づくリスク計測について、適切な統計モデルを構築する。そして、リスク計測に対するモデルおよび推定手法の精度を評価する方法であるバックテストやストレステストなど、様々な金融リスクを管理するための手続き上必要な統計的手法を、実務においてもより正確に遂行できるための方法を提案する。

### 3. 研究の方法

(1) 理論的、数值的、そして実証的という 3 つの面からアプローチする。理論面での展開は基本的に計算遂行と命題の証明である。

(2) 数値的な方法としては、統計計算言語である R や、最適化に強いソフトである MATLAB を用いて接合関数のリサンプリングや時系列データに対するブートストラップ法実行のコードを書き、シミュレーションによる数値実験を幅広い条件の下で行う。実証面では、入手可能な市場データを用いた分析を行う。

### 4. 研究成果

(1) まず、発表論文の結果であるが、データが弱従属な定常時系列の実現値である場合に、歪みリスク尺度の推定量の漸近的な性質を導いた。すなわち、推定量が非常に弱い条件の下で強一貫性をもつこと、そして、いわゆる混合性のオーダーに関する条件を課し、連続性、歪み密度関数の発散オーダー、そして損失分布の裾の重さについての正則条件を仮定するとき (これらは、実用上用いられる多くの分布と歪み関数、そして金融時系列に当てはめられることの多い確率ポラティリティモデルや GARCH モデルによって満たされる)、推定量が漸近正規性をもつことを示した。さらに、時系列解析のスペクトラル密度と自己共分散との関係をうまく利用して、漸近分散の推定量を具体的に構成し、一定の正則条件の下で一貫性をもつことが示された。この推定量は負のバイアスを持つことが簡単に示せるが、これを補正する方法としての移動ブロック・ブートストラップ法の正当性を検討した。これについては、今のところ非常に強い条件の下でのみ、理論的な正当性が示されるにとどまっている。数値実験としては、損失分布がスケールパラメータをもつ  $t$  分布となるような、簡単な確率ポラティリティモデルや GARCH モデルで検証した。また、同様のモデルを用いて、いくつかの異なる信頼水準に対する推定量のバイアスや平均 2 乗誤差の変化を検討した。当然の結果ではあるが、信頼水準が大きければ大きいほど、バイアスも平均 2 乗誤差も大きくなる。これらの結果は、実務上の確なリスク評価・管理を遂行するための方法を与えるものとして非常に意義のあることであると言える。

(2) バックテストは様々な金融リスクを管理するための手続き上必要な統計的手法であり、用いたリスク計測モデルやリスク尺度推定手法が事後的に見て適切であったかどうかを検証するための重要な手段である。これについて、条件付分布に対する推定が可能であるような条件の下では、VaR に対する方法の自然な拡張が可能であることを示したが、数値実験の結果からは完全に満足のいくものとは言えない。また、現在議論を呼んでいる問題として、VaR がバックテスト可能であるのに対して、期待ショートフォールを含む歪みリスク尺度については適切なバックテスト方法がないという議論がある。これに

対する根本的な疑問として、統計的決定理論の立場からの顕在化可能性 (elicitability) という概念がバックテスト可能性と同等であるとみなして本当に良いのかという点がある。この点に対する反論、および期待ショートフォールのバックテストを VaR によって行うというパーゼル委員会提案の方法の非整合性に関する持論をいくつかの研究集会で展開・発表した。

(3) リスク資本配賦問題はリスク尺度理論の重要な応用であり、RORAC アプローチを用いた投資のパフォーマンス評価やポートフォリオ信用リスク管理、リスク集中化の検出にとって本質的である (例えば 6.3 節を参照)。この問題は、何らかの合理的かつ公平な方法で、総リスクを各投資機会による寄与の和に分解することであり、代表的なものとしてオイラー資本配賦が提案されている。しかし、VaR や期待ショートフォールに基づくオイラー資本配賦は条件付き期待値の形であるため、計算に工夫が必要である。一方で、歪みリスク尺度に基づくオイラー資本配賦は、歪み期待値の形となり直観的に理解しやすく、歪み関数が滑らかであれば、モンテカルロ法や他の数値積分法に工夫を施すことによって比較的容易に計算することが可能であることがわかった。さらに、漸近的アプローチを用いてその計算精度を評価した。正規接合関数や他の接合関数を用いたいくつかの依存性に関するシナリオの下で、異なる歪みリスク尺度 (比例ハザード、比例オッズ、指数形、ワン変換) に基づくオイラー資本配賦がどの程度変動するのかを数値実験により検証した。

(4) 複数のリスク要因間の相互依存関係をモデリングする場合、非正規性が経験的に認められる場合には特に、接合関数によるアプローチがしばしば用いられる。この接合関数に対して推定・検定を行う際に、統計量の標本分布を推定するためには何らかのリサンプリング法が必要となる。リサンプリングを行う対象の分布として、離散な経験接合関数ではなく、それを平滑化したものを用いた方が効率的な場合がある。この目的に対して、渋谷政昭氏が考案した巧妙な方法を変形した形での平滑化“経験ベータ接合関数”を提案し、ベルギーの研究者 Johan Segers との共同研究として、(i) 経験接合関数が一様一致性を持つ場合には必ず経験ベータ接合関数も同じ性質をもつこと。(ii) 1 次の漸近論は、経験接合関数と全く同じであること (iii) 2 次元および 3 次元の接合関数族 (正規、 $t$ 、Plackett、階層アルキメデス型を含む) を設定したモンテカルロ・シミュレーション実験によれば、有限標本での経験ベータ接合関数のパフォーマンスは経験接合関数よりは常に良く、これまで提案されている平滑化推定量と比べても良好な場合が多いこ

とが分かった。

(5) 接合関数の理論とその応用の幅広さについて、近年話題となっているヴァイン接合関数や歪 (skew)  $t$  接合関数、動的接合関数モデルを含めて、ファイナンス関連の実務家の方々に紹介する展望論文 (発表論文) を執筆した。

#### <引用文献>

Basel Committee on Banking Supervision: Consultative Document (October 2013).

McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (邦訳「定量的リスク管理 基礎概念と数理技法」訳者代表 塚原英敦, 共立出版 2008)。

#### 5. 主な発表論文等

(雑誌論文) (計 2 件)

塚原 英敦, 接合分布関数 (コピュラ) その類型と理論の展望, 証券アナリストジャーナル, 査読無, 52 巻, 2014, 23 - 32

Hideatsu Tsukahara, Estimation of distortion risk measures, Journal of Financial Econometrics, 査読有, vol.12, 2014, 213-235.

doi:10.1093/jffinec/nbt005

(学会発表) (計 10 件)

Hideatsu Tsukahara, The beta-smoothed empirical copula, International Workshop in Waseda University (IWIW2015) --- Recent Developments in Statistical Distribution Theory and its Applications, 2015 年 3 月 27 日, 早稲田大学西早稲田キャンパス (東京都新宿区)

Hideatsu Tsukahara, On Backtesting Risk Measurement Models, 8th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE-ERCIM 2014), 2014 年 12 月 8 日, ピサ (イタリア)。

Hideatsu Tsukahara, Backtesting Risk Measurement Models, 5th CEQURA Conference on Advances in Financial and Insurance Risk Management, 2014 年 10 月 1 日, ミュンヘン (ドイツ)。

Hideatsu Tsukahara, Sampling from smoothed empirical copula, 3rd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, 2014 年 7 月 3 日, 台北 (台湾)。

Hideatsu Tsukahara, Estimating and Backtesting Distortion Risk Measures, 8th World Congress of the Bachelier Finance Society, 2014年6月5日,ブリュッセル(ベルギー).

Hideatsu Tsukahara, Smoothing out pseudo-observations for copula models, 7th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE-ERCIM 2013), 2013年12月16日,ロンドン(イギリス).

Hideatsu Tsukahara, Estimating and Backtesting Distortion Risk Measures, Stochastic processes & their statistics in Finance, 2013年11月1日,沖縄県青年会館(沖縄県那覇市)招待講演.

Hideatsu Tsukahara, Estimating and Backtesting Distortion Risk Measures, The 2013 IMS-FPS Workshop, 2013年6月20日,シンガポール(シンガポール).

Hideatsu Tsukahara, Risk Management with Distortion Risk Measures, JAFEE-Columbia-ISM International Conference on Financial Mathematics, Engineering, and Statistics, 2013年3月18日,統計数理研究所(東京都立川市)招待講演

Hideatsu Tsukahara, Asymptotics and bias correction for L-statistics with dependent data and applications to risk measurement, The Eighth World Congress in Probability and Statistics, 2012年7月12日,イスタンブール(トルコ).

[図書](計1件)

塚原 英敦, 朝倉書店, 「リスク尺度」, 『経済時系列ハンドブック』, 2012, 8.1節

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

塚原 英敦 (TSUKAHARA, Hideatsu)

成城大学・経済学部・教授

研究者番号: 10282550