

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：82616

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24500357

研究課題名(和文) ブロック・リサンプリング法に基づく2群の平均比較に関する新展開とその応用

研究課題名(英文) New developments and applications for comparing the means of two groups based on block resampling

研究代表者

櫻井 裕仁 (SAKURAI, Hirohito)

独立行政法人大学入試センター・研究開発部・准教授

研究者番号：00333625

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、2群の母集団分布が未知で、各群が縦断的データとして与えられる場合について、2群の平均に差があるか否かを検討するための統計的仮説検定法に関する研究を行った。本研究の成果として、2群の平均比較の問題に対してブロック・リサンプリング法の適用可能性を明らかにした。また、各群のサンプルサイズが比較的小さい場合においても、従来の方法よりも検出力の高い検定法をいくつか構築することができた。

研究成果の概要(英文)：We considered statistical hypothesis testing methods for detecting possible differences of two means when the population distributions of two samples are unknown and each sample is observed as longitudinal data. Our research showed that block resampling methods are applicable to the problem for comparison of two means, and that the testing methods based on block resampling methods are superior to traditional methods in terms of power even when sample sizes are relatively small.

研究分野：統計科学

キーワード：block resampling moving block bootstrap circular block bootstrap stationary bootstrap

1. 研究開始当初の背景

2 群のデータが与えられる場合に、2 群の平均に差があるか否かという問題に関心があることが多い。このような問題は、例えば、各群のデータ (観測値) に対して、観測値は平均的な値と誤差に分解できるという回帰モデルを想定すると、2 群の平均の比較の問題として扱うことができる。しかし、回帰モデルの誤差項に対して正規性の仮定が置けない場合、さらには各群のデータが互いに独立に同一の分布に従う (i. i. d.) という仮定が成立しない場合、上記の検定を行うための検定統計量の帰無仮説の下での分布 (以下では帰無分布と呼ぶ) の導出は、一般には極めて難しく、本研究の研究開始当初には、このような研究はあまり多くなされていなかった。

2. 研究の目的

上記 1 の項で述べた問題を解決するために、本研究では、データが i. i. d. ではない場合について、特に縦断的データの場合を検討の対象とし、2 群の平均が等しいかどうかを判断するための検定法の開発と応用に関する研究を行うことを目的とする。また、現実のデータ解析に応用する場合には、母集団や標本が得られる構造に関する仮定等はできるだけ少ないほうがよい。ため、本研究では、母集団分布に特定の分布形を仮定しない検定法を開発することも目的とする。

3. 研究の方法

(1) 問題の定式化

観測される 2 群のデータ形式として縦断的データを想定する。上記 2 の項で述べた目的を達成するために、まず、検討の対象とするデータを

- ① 2 群が対応のない縦断的データ
- ② 2 群が対応のある縦断的データ

の 2 つの場合に分け、それぞれについて研究を進める。

次に、本研究では上記①と②の両方の場合に、上記 2 の項で述べたような回帰モデルを想定する。すなわち、各群のデータ (観測値) に対して、

$$\text{観測値} = \text{平均} + \text{誤差}$$

という回帰モデルを仮定する。このとき、上記 1 の項で述べたような問題を、2 群の平均 (回帰関数) の有意差検定の問題として扱う。すなわち、帰無仮説：2 つの平均は等しい、対立仮説：2 つの平均は異なる、という統計的仮説検定の問題として定式化する。ただし 2 群の誤差項は、いずれも平均 0 で有限な分散をもつと仮定する。

(2) 検定統計量の帰無分布の近似法の検討

上記 2 の研究目的の項で述べたような検定法を開発する際には、次の 3 つの問題を考慮しなければならない。すなわち、① 2 群の母集団分布に特定の分布形を仮定しないこと、② 2 群のデータとして縦断的データの場合を想定していること、③我々が観測できる 2 群のデータは 2 群の母平均が等しいという帰無仮説のもとで得られるものではないこと、という問題である。これらの問題に対しては、以下のような方法で対処した。

まず①と②に関しては、2 群のデータに対応がある場合とない場合のいずれにおいても、母集団分布に特定の分布形を仮定せず、かつ、各群において想定している隣り合うデータ間の相関構造をできるだけ崩さないで統計的推測を行えるブロック・リサンプリング法を用いることにした。その中でも特に、Moving Block Bootstrap (MBB) 法 (Kuensch, 1989)、Circular Block Bootstrap (CBB) 法 (Politis and Romano, 1992)、Stationary Bootstrap (SB) 法 (Politis and Romano, 1994) というブロック・ブートストラップ法に着目して研究を進めた。

次に③に関しては、2 群のデータに対応がある場合とない場合とに問題を分け、それぞれの場合に妥当と考えられる検定統計量を選択し、選択した検定統計量の帰無分布の近似法に関する研究を行った。前者は次項(3)で、後者は後述する研究成果の項でまとめる。

(3) 検定統計量の検討

上記(1)で述べた①と②のそれぞれの場合に対して、妥当と考えられる検定統計量の研究を行った。検定のサイズや検出力の観点から、①と②のいずれの場合においても次のものを検定統計量として用いることとした。すなわち、各群の平均系列の差の絶対値の和 ( $T_1$ )、各群の平均系列の差の 2 乗和 ( $T_2$ )、各群の平均系列に挟まれる部分の面積の推定量 ( $T_3$ )、Hall and Hart (1990) の統計量 ( $S_n$ ) の 4 種類である。

ここで、2 つの回帰関数に挟まれる部分の面積に着目すると、上記(1)の項で述べた 2 群の平均の有意差検定の問題は、帰無仮説：2 つの回帰関数に挟まれる部分の面積が 0 である、対立仮説：2 つの回帰関数に挟まれる部分の面積は正の値を取る、という検定問題を考えることと同じである。そこで、このような性質に着目し、2 つの回帰関数に挟まれる部分の面積を台形則により近似した推定量  $T_3$  を検定統計量として用いる方法を考案した。この統計量を含め、上述した 4 種類の検定統計量に基づく検定法の性質は、後述する研究成果の項でまとめる。

<引用文献>

- ① Hall, P. and Hart, J. D. (1990). Bootstrap test for difference between means in nonparametric regression,

*Journal of the American Statistical Association*, 85, 1039–1049.

- ② Kuensch, H. R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations, *Annals of Statistics*, 17, 1217–1241.
- ③ Politis, D. N. and Romano, J. P. (1992). A circular block-resampling procedure for stationary data, *Exploring the Limit of Bootstrap* (eds. LePage, R. and Billard, L.), Wiley, 263–270.
- ④ Politis, D. N. and Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap, *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1303–1313.

#### 4. 研究成果

本研究では、上記3の項で述べた方法に基づいて研究を進め、ブロック・ブートストラップ法に基づく研究成果が得られた。この方法は、従来、推定問題において用いられることが多かったが、本研究ではこれらを上述した検定問題に適用し、その適用可能性を明らかにした。

以下では、2群のデータの対応がない場合とある場合とに分けて得られた研究成果をまとめる。まず、(1)として2群が対応のない縦断的データの場合の成果をまとめ、次に(2)として2群が対応のある縦断的データの場合の成果をまとめる。

##### (1) 2群が対応のない縦断的データの場合

長さ  $n$  の系列が2群でそれぞれ  $q_1$  個と  $q_2$  個観測されているとする。この場合、SB法に基づく検定のアルゴリズムとして、以下のものを考案した。

- (a) 各群において、 $q_1$  個と  $q_2$  個に基づく平均系列を計算する。
- (b) (a) から検定統計量の実現値を計算する。
- (c) 各群の平均系列をそれぞれの平均系列の平均で中心化する。
- (d) 手順(c)で得られた系列をSB法と同様にしてブロックに分割し、各群で  $n$  個のブロックを得る。
- (e) 手順(d)で得られたブロックを合併し、 $2n$  個のブロックの集合を得る。
- (f) 手順(e)で得られたブロックの集合から、複数個のブロックを無作為復元抽出し、2群に対応するリサンプルを構成する。
- (g) 手順(f)で得られたリサンプルに基づき、検定統計量を計算する。
- (h) 手順(f)と(g)を適当な  $B$  回繰り返し、 $B$  個の検定統計量を計算する。
- (i) 手順(b)と(h)から、 $p$  値のモンテカルロ近似値を計算し、それが与えられた有意水準以下であれば、帰無仮説を棄

却する。

以上の検定法によれば、上記3の(2)の項で述べた問題がある程度解決されることが分かった。すなわち、上記の(i)に基づいて計算される検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った結果、名目上のサイズを維持し、また多くの場合、従来の方と比較して検出力の高い検定法を構成することができた。ここで、シミュレーション結果の一例を図1に示す。図1の縦軸は検出力、横軸は後述する  $c$  の値であり、このグラフに対応するシミュレーションは次のような設定で行われている。

- ・2群の平均：0と  $c$  とする。ただし、 $c$  は  $0 \leq c \leq 1$  とする。
- ・2群の系列の長さ： $n=10$
- ・2群の系列数： $(q_1, q_2)=(20, 20)$
- ・各群の誤差項：平均が0の1次の自己回帰モデルを与え、自己回帰係数は0.1、誤差項は平均0、分散3の正規分布に従うとする。
- ・検定のサイズ・検出力を計算するために、以上の設定をもとにして2群に対応する初期標本を独立に2000組与える。
- ・リサンプリング回数： $B=2000$
- ・ブロックの長さ：名目上のサイズを維持するように取る。
- ・名目上の検定のサイズ：0.05
- ・検定統計量：上記3の(3)で述べた  $T_1 \sim T_3, S_n$  の4種類
- ・既存の方法：Bowman and Young (1996) による検定法（以下、BY法と略記する）を比較の対象とした。

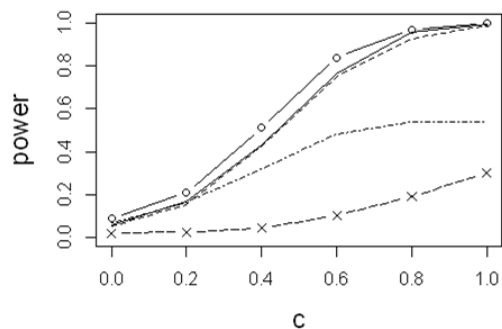


図1：検出力関数の比較（破線は  $T_1$  を、実線は  $T_2$  を、○付きの実線は  $T_3$  を、1点破線は  $S_n$  を、×付きの破線は BY を、それぞれ表す。）

シミュレーションを行った結果、以下の知見が得られた。

##### ① 検定のサイズについて

- (a) 提案した方法による検定のサイズは、名目上のサイズを維持する傾向

にある。

- (b) 誤差項の自己回帰モデルの自己回帰係数が0以下のときは、提案した方法による検定のサイズと名目上のサイズとの差は小さいが、正の場合は差が大きくなる場合がある。
- (c) BY法による検定のサイズは、名目上のサイズを過小評価する傾向がある。

## ②検出力について

- (a) 提案した方法による検出力は、従来の方法 (BY法) のそれよりも高い。特に、2群の母平均の差が大きくなるにつれて、その傾向は顕著である。
- (b) 提案した検定法に用いた4つの検定統計量について、検出力が最も高くなるのは  $T_3$  を用いた場合であり、以下、 $T_2$ ,  $T_1$ ,  $S_n$  の順に検出力が高くなる傾向がある。
- (c) 2群の系列数が増えるにつれ、検出力が高くなる。
- (d)  $0 \leq c \leq 1$  の範囲では、多くの場合、 $T_2$  と  $T_1$  による検出力はほぼ同じであるが、 $T_2$  の方が若干高い。

## (2) 2群が対応のある縦断的データの場合

次に、2群が対応のある縦断的データの成果をまとめる。2群が対応のある縦断的データの場合には、MBB法、CBB法およびSB法に基づく検定法について、この3種類の検定法の間で検定のサイズと検出力は、それぞれどのような関係にあるか、また既存の方法 (BY法) と比較してどのような挙動を示すかについての検討を行った。

長さ  $n$  の系列が2群でそれぞれ  $q$  個ずつ観測されているとする。この場合には、3種類の検定法のアルゴリズムは、次のように統一的に書くことができる。

- (a) 各群の平均系列から、平均系列の差を計算する。
- (b) (a) から検定統計量の実現値を計算する。
- (c) 平均系列の差を、その平均で中心化する。
- (d) 手順(c)で得られた長さ  $n$  の系列を、MBB法、CBB法またはSB法によりブロックに分割する。
- (e) 手順(d)で得られたブロックの集合から複数個のブロックを無作為復元抽出し、平均系列の差に対応する、大きさ  $n$  のリサンプルを構成する。
- (f) 手順(e)で得られたリサンプルに基づき、検定統計量を計算する。
- (g) 手順(d)から(f)を適当な  $B$  回繰り返し、 $B$  個の検定統計量を計算する。
- (h) 手順(b)と(g)から、 $p$  値のモンテカルロ近似値を計算し、それが与えられた有意水準以下であれば、帰無仮説を棄

却する。

手順(h)の計算結果に基づき、3種類のブロック・ブートストラップ法に基づく検定法間の比較、およびこれらと従来の方法 (BY法) との比較を行うため、上記(1)と同様な設定により、検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った。すなわち、2群の平均、2群の系列の長さ、2群の系列数、各群の誤差項、検定のサイズ・検出力を計算するため初期標本数 (2000組)、リサンプリング回数、ブロックの長さ、名目上の検定のサイズは、2群が対応のない場合と同じである。

図2には、ブロック・ブートストラップ法を固定した場合の4種類の検定統計量  $T_1 \sim T_3$ ,  $S_n$  に対応する検出力関数を比較したグラフの一例を示す。これは、2群の系列数を  $q=20$ 、誤差項の自己回帰係数を0.1とし、SB法を適用したときのものである。ただし、BY法は名目上のサイズを維持できない場合が多く、かつ検出力も低いため、図2ではBY法の検出力関数を省略している。MBB法とCBB法を適用した場合も同様な傾向となっている。

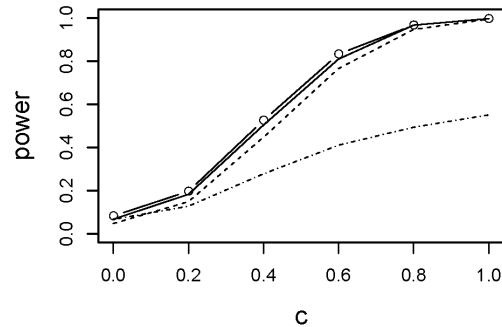


図2: ブロック・ブートストラップ法を固定した場合の検出力関数の比較 (上図はSB法に基づく検定法を適用した場合である。図1と同様に、破線は  $T_1$  を、実線は  $T_2$  を、○付きの実線は  $T_3$  を、1点破線は  $S_n$  を、それぞれ表す。)

次に、図3には検定統計量を固定した場合の3種類のブロック・ブートストラップ法に基づく検定法の検出力関数の比較結果の一例を示す。これは、2群の系列数を  $q=20$ 、誤差項の自己回帰係数を0.1とし、4種類の検定統計量のうち、 $T_3$  の場合を示したものである。

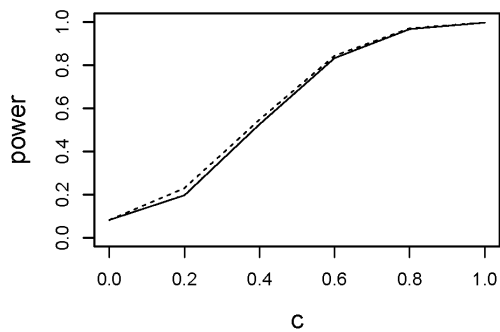


図 3：検定統計量を固定した場合の検出力関数の比較（上図は検定統計量  $T_3$  を適用した場合である。点線は MBB 法を、破線は CBB 法を、実線は SB 法を、それぞれ表す。3 つの折れ線がほぼ重なっている。）

シミュレーションを行った結果、以下の知見が得られた。

①検定のサイズについて

- (a) MBB 法, CBB 法, SB 法による検定のサイズは, 名目上のサイズを維持する傾向にある。
- (b) CBB 法と SB 法による検定のサイズと名目上のサイズとの差は, 誤差の自己回帰係数が 0 以下のときは小さい。一方, 誤差の自己回帰係数が正の場合, 検定統計量  $T_1$  と  $S_n$  を用いると, 3 種類のブロック・ブートストラップ法に基づく検定法の検定のサイズと名目上のサイズとの差は小さいが,  $T_2$  と  $T_3$  を用いると若干大きくなる場合がある。
- (c) BY 法による検定のサイズは, 名目上のサイズを過大評価する傾向がある。

②検出力について

- (a) ブロック・ブートストラップ法を MBB 法, CBB 法, SB 法のいずれかに固定した場合, 4 種類の検定統計量の中で検出力が最も高くなるのは  $T_3$  の場合であり, 以下,  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $S_n$  の順に検出力が高くなる傾向がある。
- (b) 検定統計量を  $T_1 \sim T_3$ ,  $S_n$  のいずれかに固定した場合, 3 種類のブロック・ブートストラップ法に基づく検出力を比較すると, CBB 法と SB 法を用いた方が MBB 法よりも検出力が高く, CBB 法と SB 法に基づく検定法の検出力は同程度となる傾向がある。

(3) まとめ

本研究課題では, 2 群のデータが縦断的データとして与えられている場合に, 各群の母集団分布に特定の分布形の仮定を必要としない, 2 群の母平均の有意差検定法を開発した。また, 各群の系列の長さが短い場合にも, 従来の方法と比較して検出力の高い検定法を構成することができた。

本研究で検討の対象とした方法は, 研究開始当初の背景の項で述べたように, 現実のデータ解析に適用することを想定している。観測されるデータの形式, およびデータの背後に仮定されるモデルが研究の方法の (1) の項で述べたものと同様の場合には, 本研究で得られた検定法を適用することが可能である。例えば, 医学, 薬学, 経済学分野をはじめとして, 様々な研究分野における現実の統計解析に資する点も多いと考えられる。

今後はさらに研究を進め, 例えば, 誤差項が本研究で扱ったものよりも複雑な場合の検定のサイズ・検出力の検討をはじめとして, より合理的と考えられる検定統計量や最適なブロックの長さの選択法などを検討することも必要であろう。特に最後の点に関しては, 現実のデータ解析を行う際に重要であると考えられる。

<引用文献>

- ① Bowman, A. and Young, S. (1996). Graphical comparison of nonparametric curves, *Applied Statistics*, 45, 83–98.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Sakurai, H. and Taguri, M. (2014). Comparison of block bootstrap testing methods of mean difference for paired longitudinal data, *Proceedings of COMPSTAT 2014*, 309–317. (査読有)
- ② Sakurai, H. and Taguri, M. (2013). Testing methods of mean difference for longitudinal data based on stationary bootstrap, *Proceedings of the 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, 2013*, 5303–5308. (査読無)
- ③ Sakurai, H. and Taguri, M. (2012). Test of mean difference for longitudinal data using stationary bootstrap, *COMPSTAT 2012 Book of Abstracts: 20th International Conference on Computational Statistics*, 44. (査読無)

[学会発表] (計3件)

- ① Sakurai, H. and Taguri, M.  
Comparison of block bootstrap testing methods of mean difference for paired longitudinal data,  
COMPSTAT 2014, 21st International Conference on Computational Statistics (at The International Conference Centre of Geneva, Geneva, Switzerland), 2014年8月20日発表.
- ② Sakurai, H. and Taguri, M.  
Testing methods of mean difference for longitudinal data based on stationary bootstrap,  
International Statistical Institute, The 59th World Statistics Congress (at Hong Kong Convention and Exhibition Centre, Hong Kong, China), 2013年8月27日発表.
- ③ Sakurai, H. and Taguri, M.  
Test of mean difference for longitudinal data using stationary bootstrap,  
COMPSTAT 2012, 20th International Conference on Computational Statistics (at Amathus Beach Hotel, Limassol, Cyprus), 2012年8月30日発表.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

櫻井 裕仁 (SAKURAI, Hirohito)

独立行政法人大学入試センター・研究開発部・准教授

研究者番号：00333625

### (2) 研究分担者

田栗 正章 (TAGURI, Masaaki)

中央大学・理工学部・客員教授

研究者番号：10009607

汪 金芳 (WANG, Jinfang)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10270414