

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 8 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540001

研究課題名(和文) 混合モチーフおよび代数K理論のレギュレーターの研究

研究課題名(英文) Research on Mixed motives and regulator on algebraic K-theory

研究代表者

朝倉 政典 (ASAKURA, Masanori)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60322286

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：数論幾何学におけるモチーフと呼ばれる代数多様体のコホモロジーの研究を行い、一定の成果をあげた。より詳しく、虚数乗法をもつモチーフの周期、およびその拡大としてのレギュレーターを詳しく研究した。特にレギュレータの研究については、一般超幾何関数の特殊値を用いてそれらを記述することができた。これにより、L関数の特殊値に関するベイリンソン予想への応用を期待している。この研究は大坪紀之氏(千葉大学)との共同研究である。また、虚数乗法をもつモチーフの周期に関するグロスとドリーニユの予想についての一定の成果をあげることができた。これはFresan氏(チューリッヒ工科大学)との共同研究である。

研究成果の概要(英文)：We studied motives, which are the objects arising from cohomology groups of algebraic varieties, and got some nice results. More precisely, we studied the periods of motives with complex multiplication and the regulator as its extension intensively. In particular, we got nice description in terms of special values of generalizaed hypergeometric functions. We hope that our results brings interesting progress on the Beilinson conjecture on special values of L-functions. This is a joint work with Noriyuki Otsubo at Chiba university. We also got a result on the conjecture of Gross and Deligne on the periods of motives with complex multiplication. This is a joint work with Fresan at ETHZ.

研究分野：数論幾何学

キーワード：レギュレーター 混合モチーフ

1. 研究開始当初の背景

代数的整数論において、イデアル類群およびその位数である類数は最も重要な研究対象である。Dirichlet は、代数体の整数環の単数のなす群(単数群)に対しレギュレーターと呼ばれる数論的不変量を定義し、それが Dedekind のゼータ関数の特殊値と類数によって記述されることを証明した。これは Dirichlet の解析的類数公式と呼ばれており、19 世紀の整数論における最大の成果のひとつに挙げられる。

20 世紀に入って、代数 K 理論が Quillen によって確立されると、Lichtenbaum は、代数体の整数環の単数群を K 群に一般化した場合に、解析的類数公式の類似の公式を予想した。この予想はほどなくして Borel によって証明された。Beilinson はそれをさらに徹底して推し進め、Beilinson 予想と呼ばれる一連の予想を定式化した。Beilinson は、代数体上で定義された非特異射影多様体の代数 K 群から Deligne-Beilinson コホモロジーと呼ばれる実数体上有限次元ベクトル空間への写像(Beilinson レギュレーター写像)を定義し、それを使って Dirichlet のレギュレーターの一般化(Beilinson レギュレーター)を定義した。そして、代数多様体の L 関数(モチーフの L 関数)の特殊値と Beilinson レギュレーターが有理数倍を除いて一致すると予想した。これが現在 Beilinson 予想と呼ばれているものである。この予想は、上記 Dirichlet の解析的類数公式の一部および Borel の定理を含むものである。Beilinson はモジュラー曲線など多くの場合に、この予想の検証を与え、その後もいろいろな人たちによって多くの検証が与えられた。しかしながら、Beilinson 予想は提出されてから四半世紀以上たっても極めて困難な未解決問題として残されたままである。

リーマン面の周期積分の研究は、19 世紀、ガウス、アーベル、ヤコビらによって始められ、現在まで続く深遠な研究対象のひとつである。周期によってリーマン面が特徴付けられるというトレリの定理などからも分かるように、周期は最も重要で強力な不変量である。W.Hodge によってリーマン面の調和微分形式の高次元化が行われ、いわゆる Hodge 理論が出来て以降は、非特異射影多様体(ないしコンパクト Kähler 多様体)の周期積分をコホモロジーのホッジ構造として解釈することが一般的になった。Hodge 理論ないし周期に関する研究課題は数多く、多岐にわたって存在するが、その中で、周期の整数論的性質は興味深くかつ深遠な課題のひとつである。それに関する大きな未解決問題として、Deligne の周期予想と Gross-Deligne の周期予想のふたつがよく知られている。前者は周期を L 関数の臨界値と結びつける予想であり、後者は、虚数乗法をもつホッジ構造

の周期とガンマ関数の有理数点での値と結びつける予想である。一般に L 関数の振る舞いは複雑で扱いにくいいため、Deligne の周期予想は、いくつかの具体例で検証されている以外は未解決である。Gross-Deligne の周期予想はガンマ関数を使っているため若干研究しやすい面があるが、一般的解決はまだ途上といえる。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、代数 K 理論上のレギュレーターの具体的な計算を中心とする研究および、代数多様体の周期の研究である。特に、レギュレーターの研究においては Beilinson 予想の解決を目指しており、周期の研究においては、Deligne の周期予想および Gross-Deligne の周期予想の解決を目指している。しかしながら、いずれも極めて難しい積年の未解決問題である。本研究課題では、これらの未解決問題の一般解決をいきなり目指すことはせず、むしろ、具体的な計算結果を積み上げることにより、実質的な進歩ないしブレークスルーを得ることを目標としている。

また、代数 K 理論における、p 進レギュレーターとテイト予想の二つも本研究課題における重要なテーマである。具体的には、ベイリンソン予想、ブロック・加藤予想、 K_2 のテイト予想の解決を目指すのが目的である。さらに、それらの研究成果の上に立った上で、L 関数および p 進 L 関数の特殊値との関係を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究課題では、Beilinson 予想、Deligne の周期予想および Gross-Deligne の周期予想、さらにその p 進類似の問題の解決を目指しているが、これらの未解決問題の一般解決をいきなり目指すことはせず、むしろ、具体的な計算結果を積み上げることにより、実質的な進歩ないしブレークスルーを得ることを目標としている。

レギュレーターに関しては、いまだに十分な計算結果があるとはいえない。モジュラー曲線など、限られたケースでしか具体的な計算例がない状況である。そこで本研究課題では、モジュラーでない曲面なども含めて、具体的に地に足のついた計算結果を積み上げることを、主な研究方法としている。とりわけ、楕円曲面などファイブレーション構造をもつ代数曲面は本研究課題の代表者および共同研究者らによって、詳しく研究されてきたが、今後もこの方向性は継続し、より深い結果を得ることを期待している。そして、興味深い計算結果や、それを受けてレギュレータ

一の新しい知見を得ることを目指している。

上記のように、レギュレーターの具体的な計算を行うことを主要な目的としているが、一方、できるだけ広いクラスで適用できるような手法を目指して研究している。実際、より広いクラスで p 進レギュレーターが計算できるようにになれば、レギュレーターの研究に対して大きな貢献となることが期待できると考えている。

4. 研究成果

本研究課題のテーマである Beilinson レギュレーターおよびサントミックレギュレーターに関して研究をおこない、著しい研究成果をあげることができた。それにより2本の査読付き論文の出版、および海外を含む招待講演をいくつか果たした。

まず、佐藤周友氏(中央大学・教授)との共同研究について説明する。代数的サイクルに関するテイト予想は高次数 K 理論に対しても自然な形で拡張され、それはベイリンソン・テイト予想とよばれている。私は佐藤氏と共同で、楕円曲面の場合に、この予想を研究した。主な道具として、サントミックコホモロジーを用いて攻略している。それによって、非自明な具体例の構成に成功し、また、ブロック・加藤のセルマー群に新しい元を構成するなどの成果を挙げた。この論文は、Journal of Algebraic Geometry に出版された。

次に、楕円曲面の K_1 群の不分解元について、そのレギュレーターが消えないためのシンプルな判定条件を与えた。この判定条件とクンマー曲面のテクニックを使うことで、楕円曲線の積の K_1 群に不分解元を構成することができる。このことは Lewis-Gordon (Journal of Algebraic Geometry, 1999) および Turkmen (Canada Math Bull 2013) で証明されていたが、今回、より簡明な別証明を与えることができた。この研究成果は、ブリティッシュコロロンビア大学でのホッジ理論についての会議報告集に出版予定である。

Beilinson レギュレーターの研究においては、大坪紀之氏(千葉大学)と共同で、虚数乗法をもつ代数多様体のモチヴィックコホモロジーのレギュレーターを詳しく研究し、その具体的な計算を行った。より詳しくいうと、一般超幾何関数などをはじめとする特殊関数を用いてレギュレーターを記述することを行った。この論文は投稿予定である。また、虚数乗法をもつ代数多様体の周期について、J. Fresan (チューリッヒ工科大学) と共同研究し、ファイブレーション構造をもつ代数多様体の場合に、いくつかの新しい結果を得た。これについては現在、論文を準備中である。

以上の成果については、論文準備中の場合も含めて、数多くの研究集会やシンポジウムにおいて、成果発表を行った。多くは英語による講演発表である。本研究課題に近いテーマを研究している研究者から意見をいただくとともに、彼らと積極的に議論を行った。議論を行うことによって、知識が整理され、その結果、当初の研究結果が改良されたり、また間違いが修正されたりした。Fresan 氏との共同研究も、会議での私の研究発表を通して知り合うことで、はじめられた共同研究であり、非常に実り多い研究活動につながっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

以下はすべて査読付き論文

1 朝倉政典

A simple construction of regulator indecomposable higher Chow cycles in elliptic surfaces.

Proceedings of the symposium

"Recent advances in Hodge theory: period domains, algebraic cycles, and arithmetic"

(Cambridge Uni.v press から出版予定)

2 J.Lewis and R. de Jeu,

Beilinson' Hodge conjecture for smooth varieties. With appendix by Asakura.

J.K-theory 11 (2013), no.2, 243-282

3 朝倉政典、佐藤周友

Syntomic cohomology and Beilinson' s Tate conjecture for K_2 .

J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 481-547.

[学会発表](計5件)

以下はすべて招待講演である。またすべて英語で講演した。

1 講演者: 朝倉政典

講演題目: Period conjecture of Gross-Deligne for fibrations.

研究集会名: Arithmetic and Algebraic Geometry 2015

開催場所: 東京大学 (東京都目黒区)

開催年月: 2015年1月30日

2 講演者: 朝倉政典

講演題目: Period and regulator for fibrations with CM structure

and generalized hypergeometric functions
研究集会名: Motives in Tokyo

開催場所：東京大学（東京都目黒区）
開催年月：2014年12月19日

3 講演者：朝倉政典

講演題目：Period and regulator for fibrations with CM structure and generalized hypergeometric functions
研究集会名：BIRS Workshop ``Cohomological Realization of Motives''
開催場所：バンフ、カナダ
開催年月：2014年12月8日

4 講演者：朝倉政典

講演題目：Extension of CM motives and hypergeometric functions
研究集会名：Japan-Taiwan Joint Conference on Number theory 2014
開催場所：休暇村気仙沼大島（宮城県気仙沼市）
開催年月：2014年9月2日

5 講演者：朝倉政典

講演題目：Real regulator on K_1 of a fibration of curves
研究集会名：Recent advances in Hodge theory: period domains, algebraic cycles, and arithmetic
開催場所：プリティッシュコロンビア大学（バンクーバー、カナダ）
開催年月：2013年6月20日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等 なし

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

朝倉政典 (ASAKURA Masanori)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：60322286

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし