様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　5 月 18 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０００２

研究課題名（和文）リー部分代数と超幾何微分方程式系の変形

研究課題名（英文）Deformation of Lie subalgebras and systems of hypergeometric equations

研究代表者
齋藤　睦（SAITO, Mutsumi）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０２１５５６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：ゲルファント流の超幾何微分方程式系の合流操作に関連して，カルタン部分リー代数の変形について研究した．階数nの任意の複素単純リー代数gにおいて，ボレル部分リー代数のn次元イデアルがジョルダン部分リー代数（冪零正則元の中心化代数）の極限であることを証明した．ジョルダン部分リー代数はカルタン部分代数の極限であるので，ボレル部分リー代数のn次元イデアルはカルタン部分代数の極限であるということになる．
また，コスタントの古典的結果と合わせると，n次元可換部分リー代数からなるg-加群は，カルタン部分リー代数達やジョルダン部分リー代数達で張られることが分かった．

研究成果の概要（英文）：Related to confluence of the systems of hypergeometric equations a la Gelfand, deformation of Cartan subalgebras is studied. Let g be a complex simple Lie algebra of rank n. We have proved that an n-dimensional ideal of a Borel subalgebra is a limit of Jordan Lie subalgebras, which is the centralizer of a regular nilpotent element. Since a Jordan Lie subalgebra is a limit of Cartan subalgebras, an n-dimensional ideal of a Borel subalgebra is also a limit of Cartan subalgebras. Furthermore, combining with a classical result due to Kostant, we see that the g-module composed of all n-dimensional abelian subalgebras is spanned by Cartan subalgebras or Jordan Lie subalgebras.

研究分野：代数学

キーワード：カルタン部分リー代数の変形　可換部分リー代数　グラスマン多様体

１．研究開始当初の背景

研究代表者は，超幾何微分方程式系の一つの一般化である A-超幾何微分方程式系を研究してきた．A-超幾何微分方程式系は 1980 年代後半に Gelfand 等の組織的研究で基礎付けが得られた．

Gelfand の A-超幾何微分方程式系の研究は，グラスマン多様体上に超幾何微分方程式系を定義するところから始まった．正確にはグラスマン多様体上の捻じれ D-加群として定義した．A-超幾何微分方程式系はグラスマン多様体の big cell に系を制限し，代数的トーラスによる対称性のみを残して一般化したものである．

一方，谷崎俊之(2000)はグラスマン多様体上の捻じれ D-加群としての定義を一般化しようと試みた：G を複素単純リー群とし，P を G/P がエルミート対称空間になる G の極大放物型部分群とする．また，k を G のリー代数 g のリー部分代数とする．このとき，谷崎は対称性 k を持つ或る捻じれ D-加群をエルミート対称空間 G/P 上に定義した．

A 型，つまり G/P がグラスマン多様体のとき，k として極大トーラスのリー代数（即ち，カルタン部分代数）をとったときが Gelfand の定義した系だが，その後 Gelfand-Retakh-Seganova (1988)は k として Jordan 群のリー代数をとると合流型超幾何微分方程式である Airy の微分方程式の一般化が得られることを示した．続いて木村弘信・原岡喜重・高野恭一(1992)は G=GL_n(C) の正則元の中心化代数を k としてとると，Gauss の超幾何微分方程式と Airy の微分方程式の合流に関して中間に位置する Kummer の微分方程式などの一般化も得られることを示した．さらに，木村・高野(2006)は正則元の中心化代数の極限操作で超幾何微分方程式系の合流操作が説明できることを示した．この説明は Gelfand-Retakh-Seganova（既出）以来の待望のものであった．

しかし，カルタン部分代数の境界に位置するリー部分代数はたくさんあり，正則元の中心化代数はその中で極めて特別なリー部分代数である．そこで，カルタン部分代数の境界に位置するリー部分代数を全て分類し，そこへの極限操作でどのような超幾何微分方程式系が得られるかという問題が自然に浮かび上がる．カルタン部分代数の極限を考察するというのは極めて自然な問題であるにも拘わらず，「研究の方法」欄で述べる Ginzburg らの関連する考察以外，ほとんど手が付けられていない問題であった．

また他の型の複素単純リー代数についても，適当な簡約リー部分代数 k について，同様の問題も考えられる．

２．研究の目的

本研究は，Gelfand 流の超幾何微分方程式系の合流について統一的に理解することを動機として，複素単純リー代数 g のカルタン部分代数の変形，即ち，g のランク次元の部分空間のなすグラスマン多様体におけるカルタン部分代数の集合の閉包を考察することが目的である．

より具体的には，上述の閉包の代数幾何的性質を考察することや，閉包に属する部分リー代数の随伴軌道を適当な組合せ的言葉でパラメトライズすること及び軌道間の閉包関係をその組合せ的言葉で述べることである．とりわけ，冪零元だけからなる部分リー代数についてが本質的と思われるので，その場合を先行考察することとした．

３．研究の方法

（１）カルタン部分代数達の閉包を直接考えることは非常に難しいので，まずは線形化したものを考察することとした：グラスマン多様体はプリュッカー埋め込みにより，射影空間に埋め込める．その射影空間上の錐を考察するのである．具体的には，単純リー代数 g の n 次元可換部分リー代数の n 次交代積全体が張るベクトル空間を考えると，それは g の随伴表現から誘導される表現で自然に g-加群になる．これをまず考察することとした．

Kostant の古典的な結果で，この g-加群の最高ウェイトベクトルがボレル部分リー代数のイデアルと対応するという定理がある．g-加群は最高ウェイトベクトルで決まるので，それらボレル部分リー代数のイデアルがカルタン部分代数の極限であるかどうかを調べることにした．

ボレル部分リー代数のイデアルはルート系から分かる．まずはタイプ別に考察することにし，トーラス変形や unipotent 変形を繰り返し使ってみることにした．

（２）幾何的な性質を求める第１歩として，n 次元可換部分リー代数全体のなすグラスマン多様体の部分多様体の定義方程式系について考察することにした．これは，条件を行列式の形で述べることにより記述できるであろうと予想した．

（３）研究では，幾つかの似て非なる空間が考えられる．それらが本当に異なる空間なのか否か，主に次元を計算することにより，検証することにした．

（４）カルタン部分代数の極限のうち，冪零元のみからなるものを考察することが最も重要と考えられる．なぜなら一般の場合は小さいリー代数のカルタン部分代数と冪零元のみからなるものの複合と考えられるからである．

また，冪零元のみからなるものの中で最も随伴軌道が大きいと思われる Jordan リー部分代数（正則冪零元の中心化代数のこと）が最重要と思われる．

従って，冪零元のみからなるもの，とりわ

け Jordan リー部分代数を主要な対象として考察することにした．

Ginzburg に始まり，Panyushev や Yu が展開した nilpotent pair の理論というものがあり，distinguished nilpotent pair というクラスからは冪零元のみからなるカルタン部分代数の極限が構成できる．そこで，pair を m-tuple に代えて理論の再構成を試みることにした．

（５）超幾何微分方程式系の変形（合流）については，カルタン部分代数の変形理論がある程度まとまってから本格的に考察することとし，まずは幾つかの例の計算をすることにした．

（６）上述などの研究にあたり，研究代表者並びに連携研究者は北海道大学内でのセミナーで情報交換や議論をするほか，日本数学会秋季総合分科会や年会，代数学シンポジウム，表現論シンポジウム，可換環論シンポジウム及び超幾何微分方程式系に関連する研究集会など，色々な研究集会に出席し，関連する研究者との研究打合せや情報収集を行った．

４．研究成果

（１）階数 n の任意の複素単純リー代数 g において，ボレル部分リー代数の n 次元イデアルが Jordan 部分リー代数の極限であることを証明した．Jordan 部分リー代数はカルタン部分代数の極限であるので，ボレル部分リー代数の n 次元イデアルはカルタン部分代数の極限であるということになる．また，Kostant の古典的結果と合わせると，n 次元可換部分リー代数の n 次交代積全体のなす g-加群は，カルタン部分代数に対応するもの達や，Jordan 部分リー代数に対応するもの達で張られることが分かった．この研究成果は「Limits of Jordan Lie subalgebras」という論文標題で発表予定である．

ボレル部分リー代数の n 次元イデアルは或る意味最もカルタン部分代数から遠い可換リー代数である．従って，これらがカルタン部分代数の極限であるということは非常に意外な結果であり，関連分野への強いインパクトを与えると思う．

（２）A 型の場合，n 次元可換部分リー代数の成すグラスマン多様体の定義イデアルの或る生成系をプリュッカー座標を用いて求めた．また，この結果は他の型にも適用される．これは幾何的考察の第１歩である．カルタン部分代数全体が満たす関係式達を今後さらに求め，幾何的な考察に向け基礎づけを行いたい．

（３）g=sl(n)で n が 8 以上なら，n-1 次元可換部分リー代数で，カルタン部分代数の極限にならないものが存在することを対応する多様体の次元を考察することにより，確認した．この結果は存在を示しただけなので，上述の（２）とも関連するが，カルタン部分代数全体の閉包に含まれない n-1 次元可換部分リー代数を特定したい．

（４）A 型において，標準的 Jordan 部分リー代数のトーラス変形によって得られる可換部分リー代数を組合せ論的に記述するために，一般次元の歪ヤング盤（図形）が標準的という概念を導入した．歪ヤング盤（図形）には可換部分リー代数（の随伴軌道）が対応する．そして，歪ヤング盤が標準的であれば，対応する可換部分リー代数は標準的 Jordan 部分リー代数からトーラス変形により得られることを示した．

この結果を踏まえ，今後はさらなる一般化を考え，トーラス変形に限らず，Jordan 部分リー代数の変形により得られる可換部分リー代数の組合せ論的記述を探求していく．

（５）A-超幾何微分方程式系は，（代数的トーラスのリー環の指標による捻じれが加わった）代数的トーラスに関する同変 D 加群であるが，代数的トーラスの表現を，(これを含む)一般線形群における別の極大可換部分群(Jordan 群)の表現へと取り換えた微分方程式系を構成した．その上で，極大可換部分群の間の合流操作を通じて自然に A-超幾何微分方程式系から前述で定義した微分方程式系への合流が可能かどうかの検討を行った．検討の結果，A を規定する代数的トーラスの表現が，その表現の定める群軌道の閉包の構造を変えないようにしながら，(標準的な)ボレル部分群の表現へと誘導することが可能である特別な例においては，群の合流操作を通じての方程式系の合流が可能であることが見いだせた（奥山連携研究者）．しかし，どのような条件下で合流操作が可能であるかについての統一的な見解はまだ得られていないため，引き続き検討を重ねる必要がある．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１　件）

① <u>Mutsumi Saito</u>, First syzygies of irreducible A-hypergeometric quotients, Journal of Pure and Applied Algebra Volume 217, (2013) Pages 31-44，査読有
DOI:10.1016/j.jpaa.2012.04.010.
http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/51035

〔学会発表〕（計　４　件）

① <u>Mutsumi Saito</u>, Limits of Jordan Lie subalgebras , The 1st Workshop of JSPS-MAE Sakura Program "Geometry and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems", ２０１４年９月３日，北海道大学理学部（北海道・札幌市）

② Mutsumi Saito, The ring of differential operators of an affine semigroup ring, RIMS 研究集会「可換環論シンポジウム」，２０１３年１２月６日，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

③ Mutsumi Saito, First syzygies of irreducible A-hypergeometric quotients，研究集会「Weekend workshop on computational approaches to D-modules and hypergeometric systems」，２０１３年４月２０日，神戸大学理学部（兵庫県・神戸市）

④ 齋藤 睦，A-超幾何微分方程式系の既約商，日本数学会「秋季総合分科会」函数解析学分科会，２０１２年９月２１日，九州大学（福岡県・福岡市）

６．研究組織

(1)研究代表者
齋藤 睦（SAITO，Mutsumi）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：７０２１５５６５

(2)研究分担者
なし.

(3)連携研究者
山下 博（YAMASHITA，Hiroshi）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：３０１９２７９３

阿部 紀行(ABE，Noriyuki)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：００５５３６２９

奥山 豪(OKUYAMA，Go)
北海道科学大学・保健医療学部・准教授
研究者番号：６０４３３４２１