1版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０００７
研究課題名（和文）表現論の視点から見た有限群のコホモロジーと分類空間のホモトピー論

研究課題名（英文）Cohomology of finite groups and homotopy theory of classifying space from the view point of representation theory

研究代表者
飛田　明彦（HIDA, Akihiko）

埼玉大学・教育学部・教授

研究者番号：５０２７２２７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：　有限群の両側バーンサイド多元環は、有限群が両側から作用する有限集合の同型類に対応する基底を持つ多元環であり、分類空間の安定圏での分解の情報を含んでいる。両側 Burnside 環のコホモロジー環への作用を通じて、分類空間の安定分解について研究を行った。
　主に奇素数 p に対して、位数が p の３乗である非可換群について研究し、安定分解の因子とその重複度、因子の p 元体を係数とするコホモロジーを決定した。さらに、この群を Sylow p-部分群として持つ有限群についての情報を得た。

研究成果の概要（英文）：The double Burnside algebra of a finite group is the algebra with basis corresponding to finite sets such that the group acts from both sides. This algebra contains the information on the splitting of classifying space of finite group in the stable homotopy category. We studied the stable splitting of classifying space of finite groups through the action of double Burnside algebra on the cohomology.
We mainly consider the nonabelian p-group of order p cubed and exponent p. We determined the multiplicity of summands in the stable splitting and cohomology of these summands with coefficient the field of p elements. Moreover, we obtain information on finite groups having this group as a Sylow p-subgroup.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：有限群　コホモロジー　分類空間　Burnside 環　表現論

１．研究開始当初の背景

(1) p を素数、P を位数が p の冪である有限群とする。P の両側 Burnside 多元環は次のように、さまざまな事項と関連した対象である。

・P の外部自己同型群の群環を部分環として含み、その表現論には P の部分群の外部自己同型群の表現が関連している。

・P の完備化された分類空間の安定ホモトピー圏での射を記述しており、安定分解の情報を含んでいる。

・P 上の saturated fusion system は両側 Burnside 環の特別な冪等元と対応している。

両側 Burnside 環は、上記の分類空間との関係からわかるように P のコホモロジーに自然に作用している。この作用は、上記の fusion system との関係により、P を Sylow p-部分群として持つ有限群や P 上の fusion system のコホモロジーの研究にも関連している。

(2)分類空間の安定分解についての研究に関連して Martino-Priddy 、Benson-Feshbach らは両側 Burnside 多元環の既約加群の研究を行い、その情報から安定分解の因子の重複度が得られることを示した。安定分解については、可換群や 2 群の場合にさまざまな研究が行われていた。また奇素数 p に対しては、位数が p の 3 乗である非可換群について、その群が Sylow p-部分群であるような有限単純群のコホモロジーを通しての研究結果が知られていた。

２．研究の目的

可換でない p 群で最小のものは位数が p の 3 乗の群である。奇素数 p に対して、位数が p の 3 乗の非可換群は２種類あるが、このうち非自明な巡回部分群の位数がすべて p である群を考察する。これは extraspecial p-群と呼ばれる群の一種である。この群の両側 Burnside 環のコホモロジー環への作用を調べ、加群構造を決定することが目的である。特に、その既約組成因子とその重複度を決定することが第一の目的となる。これにより、この群の分類空間の安定分解の様子を知ることができ、さらに、安定分解の因子のコホモロジーを得ることができる。また、この群を Sylow p-部分群として持つ有限群の安定分解の状況やコホモロジーについての情報を得ることができる。

この群のコホモロジー環は非常に複雑でかつ興味深い構造を持っている。また、この群を Sylow p-部分群として持つ有限群は単純群を始めとして非常に多く存在し、この群上の fusion system についても興味深いものが存在することが知られている。これらのことにより、この方向での研究は多くの情報をもたらすことが予想されている。

３．研究の方法

両側 Burnside 環は有限群の両側集合圏の対象の自己準同型環である。また、群のコホモロジーは両側集合関手、すなわち両側集合圏からベクトル空間の圏への関手である。本研究では、両側 Burnside 環の表現と、コホモロジーへの作用を調べるために、両側集合関手の手法を利用する。

Bouc-Stancu-Thevenaz による既約両側集合関手と両側 Burnside 多元環の既約加群に関する手法を応用し、コホモロジー環の両側 Burnside 環上の加群としての構造を解析する。

４．研究成果

以下では、p を奇素数とし、E は位数が p の 3 乗ですべての非自明な巡回部分群の位数が p である非可換有限 p-群とする。

H(E,Z) を E の整数係数のコホモロジー環とする。その環構造は既に知られている。また、p による剰余 H(E,Z)/pH(E,Z) を考え、その冪零元イデアルによる剰余環を H(E) で表す。また、A(E,E) を p 元体 F 上の両側 Burnside 多元環とする。A(E,E) は可移両側 E 集合の同型類に対応する基底を持っている。一方、可移両側 E 集合は、E の部分群 Q と Q から E への準同型写像 f の組により記述される。A(E,E) は H(E,Z)/pH(E,Z)、H(E)、そして F 係数のコホモロジー環 H(E,F) のいずれにも作用する。この作用は、部分群 Q からのトレース写像と、f により誘導される写像の合成として得られる。ここでは第一に、H(E) への作用を研究し、その後 H(E,F) の考察を行った。

(1) H(E) の構造と外部自己同型群の作用。

E の外部自己同型群は 2 次一般線形群と同型である。この群の表現論はよく理解されている。H(E)における外部自己同型群の作用での不変部分環 C は多項式部分環となっている。一方、Quillen の結果により H(E) の元は極大基本可換部分群への制限により追跡される。各極大基本可換部分群 A について H(A) の自己同型群での不変環は Dickson 不変環であり、やはり多項式部分環となる。これらは H(E) の普遍安定部分環 D に持ち上がる。つまり制限写像により D は各極大基本可換部分群 A に対して H(A) の不変環と同型となる。

H(E) は C 上の自由加群である。このことと外部自己同型群の作用を用いて H(E) の扱いやすい記述を得た。H(E) には次数が 2p の非常に重要な正則元 v が存在する。外部自己同型群はこの v に行列の行列式として作用している。S(i) を H(E) の 2i 次斉次部分、T(i) を 2(p-1+i) 次斉次部分のある部分ベクトル空間とする。S(i)、T(i)、と v の j 乗との積をそれぞれ S(i,j)、T(i,j) と表す。このとき次の結果を得た。

定理 S(i,j) と T(i,j) （i,j は 0 以上

p-2 以下の範囲に渡るとする）の基底が H(E) の C 自由加群としての基底となる。

この結果は以下の考察にとって有用なものとなる。

(2) H(E) の A(E,E) 構造と安定分解因子のコホモロジーの冪例剰余。

H(E) への A(E,E) 加群の構造を調べ、次の性質を持つ部分加群の列を構成した。

隣り合う部分加群による剰余加群は、「完全可約であり１種類の既約加群の直和と同型である」かまたは、「完全可約ではないが、最小部分群として E を持つ既約加群のみを組成因子に持ち、組成因子の重複度は外部自己同型群の作用をみることで読み取れる」のどちらかとなる。

この結果を用いて既約 A(E,E)-加群の分類を行いその次元を決定した。

定理　既約 A(E,E)-加群は次の様に与えられる。

・位数が p である巡回群を最小部分群とし、その自己同型群の一次元既約表現に対応する p-1 種類の既約加群。

・極大基本可換部分群を最小部分群とし、その自己同型群の射影的既約加群に対応する p-1 種類の既約加群。

・E 自身を最小部分群とする外部自己同型群の既約加群に対応する既約加群。

・自明な最小部分群を持つ１次元の既約加群。

次元については既に Dietz-Priddy により知られていたが、ここではこれらすべての既約加群を H(E) の部分剰余加群として具体的に構成することができた。

既約 A(E,E)-加群 S に対して、Se=S であり S と同型でない既約加群を零化するような A(E,E) の冪等元が存在する。これについて、H(E)e と同型な H(E) の次数つき部分ベクトル空間を構成した。これは無限次元ベクトル空間であるが、次数 n を固定して考えると、H(E)e の次元は S の次元と H(E) における S の組成因子としての重複度の積である。これより、すべての既約加群の組成因子としての重複度を読み取ることができる。

また、 H(E)e は S に対応する安定因子の wedge 和のコホモロジーの冪零剰余に相当するものと考えられ、安定因子の冪零剰余コホモロジーが得られたこととなる。特に次の結果を得た。

定理　E の主支配的因子の冪零剰余コホモロジーは普遍安定部分環 D である。

さらに階数の大きい extraspecial p-群についても、同様に支配的主因子のコホモロジーの決定が望まれている。

なお、素数 p が 3 より大きい場合には、H(E) は H(E,F) の冪零元イデアルによる剰余と一致することが知られている。他方、素数 p が 3 の場合、 H(E,F) の冪零元イデアルによる剰余環は H(E) よりも真に大きい。この差に現われる既約組成因子を求め、自明な加群については、すべて H(E) に現れることを示した。結果として、p に関わらず主支配的因子の冪零剰余コホモロジーは H(E)と H(E,F) の冪零元イデアルによる剰余環のどちらを用いても D に一致することが示された。

(3) H(E,F) の A(E,E) 構造。

F を p 元からなる有限体とし、F 係数のコホモロジー環すなわち mod p コホモロジー環を考える。H(E) は H(E,F) の冪零剰余環の部分環である。H(E,F) の環構造は知られているが非常に複雑でありそのままでは考察が困難である。本研究では前項の結果と、整係数コホモロジー H(E,Z) の情報を組み合わせることにより、すべての既約 A(E,E)-加群に対して、H(E,F) における組成因子としての重複度を決定した。結果として、分類空間の安定因子の F 係数コホモロジーが得られたこととなる。

他方、既約 A(E,E)-加群が H(E) に組成因子として現れる次数について考察を行った。特にすべての既約加群が現れる次数の下限について調べた。

定理　すべての既約加群は H(E) においては次数 2(p+2)(p-1) までに現れる。

H(E,F) についても同様の結果が得られる。また、一般の 有限 p-群に対してもこのような下限の評価が得られることが期待される。

(4) E を Sylow p-部分群に持つ有限群の完備化された分類空間の安定分解。

G は E を Sylow p-部分群として持つ有限群であるとする。G の分類空間 BG は BE の安定因子となっている。前項の結果を利用して、BG の安定因子についての結果を得ることができる。既約 A(E,E)-加群 S に対応する直既約な安定因子を X とおく。BG における X の重複度は S[G] の次元である。[G] は G 自身を (E,E) 両側集合とみたときの同型類でありここでは [G] を A(E,E) の元と考えている。 S[G] は S に [G] を作用させて得られる部分ベクトル空間である。

上記の結果により、既約加群を H(E) の中に実現することができ、それに対して [G] の作用の解析を行った。[G] の作用は G による E 上の fusion system により決定される。特に, G での E の正規化群の作用と、E の極大基本可換部分群のうち radical 部分群となるものへの制限により S[G] は計算されることがわかる。E 上の fusion system とその特性両側集合についても状況は同様

である。
本研究では、特に radical 部分群の個数が 2 である場合に着目した。それらは p 元体上の 3 次線形群に関連した群の場合である。p-1 が 3 の倍数でない場合と 3 の倍数である場合に分かれ 6 種類の fusion system が存在する。これらについて S[G] を解析し、安定因子の重複度を調べた。

定理 radical 部分群の個数が 2 である場合について、分類空間の安定分解における因子の重複度をすべて決定した。

既存の結果と併せると、radical 部分群の個数が 2 個以上の場合の安定分解がすべて得られたことになる。特に標数 p が 7 である場合に着目して、E を Sylow 7-部分群として持つ有限群、あるいは E 上の 7-fusion system について詳細を考察した。Fusion system の包含関係がある場合、一方の分類空間は他方の安定因子とみなすことができる。Fusion system の包含関係を調べ、この状況を表す図式を求めた。主に扱った群は、Fischer 単純群とその交換子部分群、O'Nan 単純群、Ruiz-Viruel exotic fusion system、そして 3 次特殊射影線形群とその 3 種類の拡大（位数 2 と 3 の巡回群、3 次対称群、による）である。この結果は N. Yagita (2007) の結果を補完するものとなっている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 2 件）

①<u>飛田明彦</u>、Cohomology of the extraspecial p-group and representations of the double Burnside algebra、「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組み合せ論の研究」数理解析研究所講究録 1872 (2014) 132-139、査読無

②<u>A. Hida</u>, N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p-group, J. Algebra 409 (2014) 265-319, 査読有

〔学会発表〕（計 3 件）

①<u>飛田明彦</u>、Cohomology of the extraspecial p-group and representations of the double Burnside algebra、研究集会「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組み合せ論の研究」2013 年 1 月 9 日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

②<u>飛田明彦</u>、Extraspecial p-群のコホモロジーへの両側 Burnside 環の作用について、日本数学会 2013 年度年会代数学分科会、2013 年 3 月 22 日、京都大学（京都府・京都市）

③<u>飛田明彦</u>、Extraspecial p-群の mod-p コホモロジーと両側 Burnside 環の作用について、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会代数学分科会、2013 年 9 月 25 日、愛媛大学（愛媛県・松山市）

６．研究組織

(1)研究代表者
飛田　明彦（HIDA, Akihiko）
埼玉大学・教育学部・教授
研究者番号：50272274

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし