

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 9 月 9 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540012

研究課題名(和文)置換規則力学系のピソ予想

研究課題名(英文)Pisot conjecture on substitutive dynamical systems

研究代表者

秋山 茂樹 (Akiyama, Shigeki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：60212445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：置換規則力学系はより一般の力学系に生ずる自己誘導構造をモデル化した力学系であり文字を文字列に置き換える操作で生成される。置換規則力学系は強混合的にならない硬い力学系で、非自明なスペクトルを持つか否かは拡大係数が Pisot 数であることを同値である。本研究では既約 Pisot 置換規則力学系が純離散スペクトルを持つという予想に挑戦した。結果として J.Y.Lee の共同研究で純離散性と同値な Overlap 一致条件と強一致条件との関係を明確にし、さらに J.Y.Lee, F.Gahler との共同で既約 Pisot で trace が 3 未満で予想が成立していることを確認した。

研究成果の概要(英文)：Substitutive dynamical system models self-inducing structure appears in general dynamical systems. It is generated by a substitution rule on finite letters. Such system realized as self-similar tiling can not be strongly mixing and whether it is weakly mixing or not is described by whether the dilation is a Pisot number.

We studied the well-known conjecture in this area which asserts that every irreducible Pisot substitution is pure discrete. As a result with J.Y.Lee we elucidated relationship between several coincidence conditions. Further with J.Y.Lee and F.Gahler, we did a systematic validation of the conjecture up to trace 2. All of them are pure discrete, we did not find a counter example.

研究分野：数論

キーワード：ピソ数 置換規則 自己誘導構造 タイリング 自然拡大 概周期構造 準結晶

### 1. 研究開始当初の背景

自己アフィンタイル張りの平行移動作用に関する力学系は、数論的アルゴリズムの自己誘導構造の記述にしばしば現れる。特にタイル張り力学系が純離散スペクトルを示す場合には、自然拡大の具体的な構成、周期点集合の記述、Diophantus 近似への応用など様々な数論的成果が期待できる。そこで、準離散スペクトルであることを様々なクラスで示すことは重要である。

### 2. 研究の目的

このような問題設定において最も著名な未解決問題は、既約 Pisot 置換規則が純離散であろうというものである。これは Pisot Substitution 予想と呼ばれ、この分野の中心問題の一つである。この予想に様々な角度から取り組むことを本研究の中心課題とした。関連して様々な数論的アルゴリズムの自己誘導構造に注目し詳しく調べる事を第二の目標とした。この問題は数論、位相、解析、情報理論の様々な問題と関連する分野横断的なものである。特に自己誘導構造の拡大定数になぜ Pisot 数という特別な代数的整数が生ずるかという、ある種の剛性の問題を重要な研究テーマとした。

### 3. 研究の方法

Pisot Substitution 予想を調べるには、タイル張り力学系の純離散性の同値条件を詳しく調べることが重要である。また自己誘導構造をもつ数論的アルゴリズムの研究では、エルゴード理論と数論の両方のアイデアを合わせて新しい切り口を見つけることが大事である。

Pisot 型置換規則の固定点のシフト軌道閉包で生ずる substitutive 力学系は、自己誘導型力学系の原始型である。この離散力学系の自然な懸垂による一次元自己相似タイル張りの Pisot 予想に取り組む。Pisot 予想は M.Barge らの研究により Proximal な二つのタイル張り力学系の流れが coincidence を持つことと同値であり、また一般の Dumont-Thomas 数系の有限性の特徴づけの問題とも捉えられる。特に proximarity と dense coincidence のよりよい理解が重要である。

第二は一般の高次元自己相似タイル張りの純離散でない力学系を skew product の形で幾何学的に表現できないか、またそのような表示ができる場合に連続スペクトル部分のより具体的な記述は可能かを研究する。純離散でない場合を考察することで純離散なタイル張り力学系をよりよく理解することができるものと思われる。第三は、自己相似タイル張りの構成問題である。拡大的行列が与えられたとしても如何なる平行移動の集合を与えると自己相似タイル張りを生ずるのかは非常に難しい。この問題を大課題として取り上げた。

### 4. 研究成果

Pisot 予想は、タイル張り力学系の純離散性に関するものであるが、純離散性にはこれまでも、いくつかの異なる条件下での同値条件が知られていた。これらは一致条件と呼ばれている。J.Y.Lee との共同研究で、Overlap coincidence が strong coincidence を導くことが証明できた。さらに、その逆に多くの制御点に関する strong coincidence から Overlap coincidence を導くこともできた。

J.Y.Lee と F.Gahler との共同で Pisot 予想がトレース 3 未満では成り立つことをしめし、さらに自己アフィンタイル張りの大きなクラスでも同様の純離散性が成立していることを確かめた。

多項式の生成するイデアルの高さの最小を求める問題は、タイル張りの位相的性質と関連して調べられている課題である。P.Drungiras と共に低次元の場合を研究し、Automata との関係も導いた。さらに T.Zaimi, J.Thuswaldner らとともに、高さが有界となる多項式の完全な特徴づけに成功した。共役の絶対値が 1 でないような代数的数の満たす整数係数多項式で高さが最小となるものを決定するアルゴリズムが副産物として記述できた。

離散回転の自己誘導構造を E.Harriss との共同で調べ、この力学系がオドメーターと同型であることを示した。離散回転については多くの基本的問題が未解決である。すべての軌道が周期的という予想はそのなかでも大きな課題である。A.Petho との共同で、どのようなパラメータに関する離散回転でも周期軌道が無数個あることが証明できた。これは、今までの離散回転の研究では全く手につかなかった難題であり、かなり一般のクラスでの無限性の証明の成功は大きな進歩と考えている。

V.Komornik との共同で  $\{0, 1\}$  係数多項式に関する Erdos の問題について底が 2 未満で Pisot 数でないときに、点集合に集積点があることを示した。この問題の設定では最良の結果である。この研究は D.J.Feng により進められ、点集合が同じ条件下では稠密になることまでが証明されている。この結果は Pisot 数の興味深い特徴づけを与えている。

強非周期タイル集合とは、タイル張り可能であるが周期的には決してできないようなタイルの有限集合のことである。Ammann のタイルは強非周期タイル集合の著名な例であるが、その辺のマッチング条件を大幅に簡易化したものを発見した。強非周期性の証明も大変明解となった。Ammann のタイルの生成するタイル張りの力学系は純離散スペクトルを示す。簡単な隣接関係で局所的に記述されることは、準結晶の数理モデルとして非常によいものとなることを意味す

る。

H.Brunotte とともに多項式を要素とする行列の冪に関する almost linear periodicity という概念を研究した。この研究は Perron Frobenius の定理のある種の一般化を与える。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](17件表示・計21件)

1. Shigeki Akiyama, Jörg Thuswaldner and Toufik Zaïmi, Comments on the height reducing property II. *Indag. Math.* vol. 26 (2015) 28-39. DOI:10.1016/j.indag.2014.07.002. 査読有
2. Shigeki Akiyama, Jörg Thuswaldner and Toufik Zaïmi, Characterization of the numbers which satisfy the height reducing property, *Indag. Math.* vol.26 (2015) 24-27, DOI:10.1016/j.indag.2014.03.003. 査読有
3. Shigeki Akiyama, Franz Gähler and Jeong-Yup Lee, Determining pure discrete spectrum on some self-affine tilings, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 16:3 (2014) 305–316. 査読有
4. Shigeki Akiyama, A family of non-sofic beta expansions, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. Published Online 2014. DOI:10.1017/etds.2014.60. 査読有
5. Shigeki Akiyama and Jeong-Yup Lee, Overlap coincidence to strong coincidence in substitution tiling dynamics, *European J. Combin.* Volume 39, July 2014, Pages 233–243, DOI:10.1016/j.ejc.2014.01.009. 査読有
6. Shigeki Akiyama, Mean divisibility of multinomial coefficients, *Journal of Number Theory*, vol. 136 (2014) no. 3, 438-459, DOI:10.1016/j.jnt.2013.10.005. 査読有
7. Shigeki Akiyama and Attila Pethő, On the distribution of polynomials with bounded roots II. Polynomials with integer coefficients, *Uniform Distribution Theory*, vol. 9 (2014) no. 1, 5-19. 査読有
8. Shigeki Akiyama and Jeong-Yup Lee, The computation of overlap coincidence in Taylor-Socolar substitution tiling, *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 51 (2014) 597–607. 査読有
9. Shigeki Akiyama and Attila Pethő, On the distribution of polynomials with bounded roots, I. Polynomials with real coefficients, *Journal of Mathematical Society of Japan*, Vol. 66, No. 3 (2014) 1–23, DOI: 10.2969/jmsj/. 査読有
10. Shigeki Akiyama and Florian Luca, On the least common multiple of Lucas subsequences, *Acta Arithmetica*, vol. 161, no.4 (2013) 327-349, DOI: 10.4064/aa161-4-2. 査読有
11. Shigeki Akiyama and Attila Pethő, Discretized rotation has infinitely many periodic orbits, *Nonlinearity* vol. 26, no.3 (2013), 871-880, doi:10.1088/0951-7715/26/3/871. 査読有
12. Shigeki Akiyama and Edmund Harriss, Pentagonal Domain Exchange, *Discrete and Continuous Dynamical System -A*, Vol. 33, Num.10 (2013) 4375-4400, doi:10.3934/dcds.2013.33.4375. 査読有
13. Shigeki Akiyama and Toufik Zaïmi, Comments on the height reducing property, *Cent. Eur. J. Math.*, 2013, 11(9),1616-1627, DOI:10.2478/s11533-013-0262-4. 査読有
14. Shigeki Akiyama and Vilmos Komornik, Discrete Spectra and Pisot numbers, *Journal of Number Theory*, vol. 133 (2013), 375-390, DOI 10.1016/j.jnt.2012.07.015. 査読有
15. Shigeki Akiyama, A note on aperiodic Ammann tiles, *Discrete & Computational Geometry*, vol.48 (2012) 702–710, DOI 10.1007/s00454-012-9418-4. 査読有
16. Shigeki Akiyama and Horst Brunotte, Primitive matrices over polynomial semirings, *Linear Algebra and its Applications*, vol.436, Issue 9, 1 May 2012, Pages 3568–3596. 査読有
17. Shigeki Akiyama, Paulius Drungilas and Jonas Jankauskas, Height reducing problem on algebraic integers, *Functiones et Approximatio*, vol. 47, no. 1 (2012) 105-119, DOI: 10.7169/facm/2012.17.1.9 査読有

[学会発表] 主な海外の発表のみ記載 計36件)

1. S.Akiyama, Rotational Beta Expansion 2nd Self-similar tilings, The 1-st Hong-Kong workshop on

- Fractal Geometry and Related Areas,  
3/21 2016 香港科技大、香港、中国
2. S.Akiyama, Rotational Beta Expansion and Self-similar tilings, Substitution and continued fraction, 3/7 2016 パリ第七大学、パリ、フランス
  3. S.Akiyama, Beta Expansion involving rotation action, Measurable and Topological Dynamical system, 7/1 2015 大田, 韓国
  4. S.Akiyama, Invariant Measures of Rotational Beta expansions, Fractal and Numeration, Admont, オーストリア, 6/10 2015
  5. S.Akiyama, Invariant Measures of Rotational Beta expansions, 華中科技大学大コロキウム、武漢、中国, 3/27 2015
  6. S.Akiyama, Beyond the Pisot Conjecture, an outlook: Pisot Conjecture at Lorenz Center, ライデン、オランダ 9/5 2014
  7. S.Akiyama, Discretized Rotation: Intersection between number theory and dynamical system, International Conference of Discrete and Applied Science, 5/22 2014, バンコク, タイ
  8. S.Akiyama, Height Reducing Problem, 2<sup>nd</sup> Pacific Rim Congress, 6/25 2013 上海、中国
  9. S.Akiyama, Number System and its associated tiling dynamical systems, Summer School 'Number Theory and Dynamical System' 17-20/6 2013 Grenoble, フランス
  10. S.Akiyama, On Shift Radix Systems, Periodic Orbits in Dynamical System, ESI, 5/25 2012 ウィーン オーストリア

〔図書〕(計 2 件)

1. S.Akiyama(主編集委員), Numeration and Substitution, RIMS Kokyuroku Bessatsu B46, 246 頁, 京都大学数理解析研究所発行 2014.
2. S.Akiyama(主編集委員), Summer School on Uniform Distribution, RIMS Kokyuroku Bessatsu B, 118 頁, 京都大学数理解析研究所発行 2012.

〔その他〕

ホームページ

[http://math.tsukuba.ac.jp/~akiyama/index\\_j.html](http://math.tsukuba.ac.jp/~akiyama/index_j.html)

に多くの参考資料、解説記事等があるのでご覧ください。

6 . 研究組織

(1)研究代表者

秋山 茂樹 (AKIYAMA Shigeki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号 : 60212445

(2)研究分担者

小松和志 (KOMATSU, Kazushi)

高知大学・理学部・准教授

研究者番号 : 00253336