様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 １８ 日現在

機関番号： １３９０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４５４００１５
研究課題名（和文） ゼータ関数の解析的挙動の研究と，その数論的誤差項への応用

研究課題名（英文） On analytic behaviour of zeta-function and its applications to the arithmetical error term

研究代表者
谷川　好男（TANIGAWA, Yoshio）

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：５０１０９２６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：一般セルバーグクラスに属するゼータ関数の係数和から生ずる誤差項について，そのトング型の公式を導いた．それを応用し，３次元非対称約数問題において未解決であった場合の，誤差項の２乗平均の漸近式を求めることができた．これは1987年のイヴィッチの予想の部分的解決になっている．数論的誤差項の離散和と連続和の差の研究において新しい表示式を考案し，より高次の場合や，ランキン-セルバーグの場合にも両者の差を研究した．南出の先行研究の一般化として，ζ(s) の k 階導関数と l 階導関数の積の場合を考察し，対応する数論的誤差項の上からの評価を指数対の理論を使って求め，南出の結果の改良を与えた．

研究成果の概要（英文）：We derived the truncated Tong-type formula for the arithmetical error term arising from the sum of the coeffcients of a zeta function in an extended Selberg class. We applied our formula to the 3-dimensional asymetric divisor problems and got an asymptotic formula of the mean square of the error term. This gives a partial answer of the conjecture of Ivic (1987). We gave a new formula for the difference between the discrete and continuous sum of the arithmetical error term. By this formula, we gave new estimates for the difference of higher power moments case and of the Rankin-Selberg case. We considered the product of k and l-th derivatives of the Riemann zeta function. We derived a certain certain representation of the arithmetical error term arising form this product and gave an upper bound using the theory of exponent pairs. This gives an improvement of Minamide's previous result.

研究分野： 解析的整数論

キーワード： 数論的誤差項　ディリクレ約数問題　多次元非対称約数問題　Tong タイプの公式　２乗平均　微分約数問題　離散和と連続和

１．研究開始当初の背景

数論的関数 a(n) の値は一般に n の素因数分解に深く関係していることから，その個々の値は非常に不規則である．その為 a(n) の x までの総和が重要な問題となる．その主要項は，多くの場合，初等関数で記述されるから，主な研究対象はその誤差項となる．従来ディリクレの約数問題，ガウスの円問題など，誤差項の上下からの評価や２乗平均などが詳細に研究されてきた．私自身もディリクレ約数問題において誤差項を含んだ積分の explicit な表現や，誤差項を係数とするディリクレ級数の解析的な性質など数多く研究してきた．以上のことを背景として，約数関数以外の重要な数論的関数についてもそれらの挙動を調べること，また古典的な約数問題や円問題においても，離散和や連続和の違いなど新しい問題について詳しく調べることなどを動機として研究を始めた．

２．研究の目的

約数問題における平均値定理などは長い歴史を持つ古典的な問題であるが，現在に於いても盛んに研究されている対象である．当研究では約数関数以外の重要な数論的関数につていも平均値定理を調べたり，また古典的な約数問題においても新しい視点から総和の誤差項の挙動を調べることを目的とする．

(1) 多次元非対称約数問題では，クラッツェルやイヴィッチなどの研究があるが，ディリクレ約数問題と比べるとまだ研究が進んでいないところが多い．我々は特に３次元の非対称約数問題についてその誤差項の２乗平均を調べる．

(2) 約数問題や円問題に対する数論的誤差項の離散和と連続和の違いを調べる．この問題はハーディが円問題のときに研究したのが始まりであるが，最近連携研究者の古屋氏が約数問題のときを詳細に調べた．また前年度までに我々も一般約数関数などで調べた．当研究においては古屋氏の研究や我々の研究をさらに発展させることを目指す．具体的には，従来よりも高次の平均の差，またランキン-セルバーグ級数でも使えるような方法を確立することである．また誤差項の離散和をとるとき，シフトしたところで考えることで，よりよく連続和を近似することを考える．

(3) リーマンゼータ関数を$\zeta(s)$とするとき，$\zeta(s)^2$に対するものがディリクレの約数問題である．一方連携研究者の南出氏は$(\zeta'(s))^2$で定義される数論的関数の総和を研究した．一見 log x が掛かるだけだと思われがちであるが，実際にやってみると非常に複雑であることがわかる．この問題の拡張として，k 階と l 階の導関数の積など一般化した形で考察する．

３．研究の方法

(1) 数論的誤差項の２乗平均の研究の基本的な道具はヴォロノイ公式であるといってよいと思う．実際ディリクレの約数問題やガウスの円問題では最も強力な手段である．ヴォロノイ公式は，数論的誤差項の一種の級数表示で，ペロンの公式や生成ディリクレ級数の関数等式を組み合わせ，複雑な計算の後に得られる．しかし，多次元非対称約数問題では関数等式が複雑になり．また通常のヴォロノイ公式では，その誤差項が大きくなりすぎてよい評価が得られない．そこで我々はトングの方法を拡張して，誤差項の新しい表示式を導く．

(2) 離散和と連続和の差についての従来の研究では，古屋氏の補題により，第１ベルヌーイ関数を用いて低次の積分に帰着させていた．この研究では新しい手法でこれらの差を扱う．これにより，より高次の平均の差や，ランキン-セルバーグ級数の場合にも応用できるようにする．

(3) $\zeta(s)$ の k 階導関数についてヴォロノイ公式を導いて調べることはすでに南出氏の研究がある．我々はこれを一般化した形で考え，その誤差項の，ヴォロノイ型でなく，チャウラ-ワールム型の表示を導き，exponent pair の理論を用いて，上からの評価を与える．

４．研究成果

(1) 数論的誤差項の表示を求めるのに，ヴォロノイ型の表示では誤差項が大きすぎてよい結果が得られない．そのため我々はトングの方法に従って誤差項の積分表示を求めた．トングは $\zeta(s)^k$ の場合をやっていたが，我々の目指す３次元非対称約数問題では，まず関数等式からして非対称である．そのため一般化されたセルバーグクラスのゼータ関数という枠組みで，かつリース和の場合にまで拡張し，その誤差項の truncated form を導出した．数論的誤差項は，ヴォロノイ型と同じ形の有限和と，積分で表示された項のいくつかの和として書くことができた．特に後半の部分は，ヴォロノイでは 0-term として評価されていたが，それを積分表示した点が重要である．この公式を使うことにより，３次元約数関数 d(a,b,c;n) の $c<a+b$ の場合にその数論的誤差項の２乗平均の漸近式を導くことができた．この条件下での漸近式は初めて得られたものであり，イヴィッチが1987 年に出した一般の予想の部分的ではあるが重要な解決となっている．更に我々のトング型の公式を，３次約数関数 $d_3(n)$ の shifted convolution や，短区間平均値定理

などいくつかの重要な問題に対して応用することができた．これは X. Cao 氏(北京石油化工学院)と W. Zhai 氏(中国鉱業大学)との共同研究である．

(2) 数論的誤差項の離散和と連続和の差について，従来の古屋氏の方法とは異なる方法でアプローチし，ディリクレ約数問題やガウス円問題の場合に，より高次の平均で新しい結果を得た．またこの方法はランキン-セルバーグ級数の場合にも有効であることがわかり，この２つの和の３乗目までの差について詳しく調べた. 以上は X. Cao, W. Zhai, 古屋氏との共同研究である．古屋氏とは，誤差項をシフトさせた点で和をとることにより，より良い連続和の近似を得るという共同研究を行った．このときどの点にシフトさせるかが問題であるが，それはベルヌーイ多項式の根で決まるという興味深い結果を得た．特に円問題の場合は，一般の点でシフトさせた和を，ベルヌーイ多項式を係数とする連続和の一次結合として書くことができた.

(3) 南出氏が行った，$\zeta'(s)^2$ の係数和から得られる誤差項の２乗平均の一般化として，$\zeta(s)$ の k 階微分と l 階微分の積を考えた．我々はこの誤差項について第１ベルヌーイ関数を用いたチャウラ-ワールム型の表示を導き, exponent pair の理論を用いて，上からの評価を与えた．これは以前南出氏が出した評価の改良となった．以上は古屋氏と南出氏との共同研究である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

① J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problem, Math. Slovaca, 掲載決定, 査読有

② I.Kiuchi, M.Minamide, Y.Tanigawa, On a sum involving the Mobius function, Acta Arith. 掲載決定, 査読有

③ X. Cao, J.Furuya, Y. Tanigawa, W. Zhai, On the mean of the shifted error term in the theory of the Dirichlet divisor problem, Rocky Mountain J. Math. 掲載決定, 査読有

④ H.H.Chan, Y.Tanigawa, A generalization of Brafman-Bailey type identities, Proceeding of AMS, 143 (2015), 185-195, 査読無
doi: S 0002-9939(2014)12195-2

⑤ J. Furuya, Y. Tanigawa, Mean value of the error term with shifted arguments in the circle problem, Note on Number Theory and Discrete Mathematics, 20 (2014), 44-51, 査読有,
URL: nntdm.net/volume-20-2014

⑥ J.Furuya, Y.Tanigawa, On the integrals containing the error term in the circle problem, Functiones et Approximatio Comm. Math. 51.2 (2014), 303-333, 査読有 doi: 10.7169/facm/2014.51.2.5

⑦ X.Cao, J.Furuya, Y.Tanigawa, W.Zhai, On the difference between two kinds of mean value formulas of number theoretic error term, International J of Number Theory, 10 (2014), 1143-1170, 査読有 doi:10.1142/S1793042114500195

⑧ J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, Moment integral of 1/sin t and related zeta-values, Ramanujan J. 33 (2014), 423-445, 査読有
Doi:10.1007/s11139-013-9467-1.

⑨ X.Cao, J.Furuya, Y.Tanigawa,W.Zhai, A generalized divisor problem and the sum of Chowla and Walum II, Functiones et Approximatio Comm. Math. 49.1 (2013), 159-188, 査読有,
Doi: 10.7169/facm/2013.49.1.10.

⑩ X.Cao, J.Furuya, Y.Tanigawa, W.Zhai, A generalized divisor problem and the sum of Chowla and Walum, Journal of Analysis and Applications 400 (2013), 15-21, 査読有 doi:10.1016/j.jmaa.2012.11.027

⑪ B.Berndt, H.H.Chan, Y. Tanigawa, Two Dirichlet series evaluations found on page 196 of Ramanujan’s Lost Notebook, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 153 (2012), 341-360, 査読有
Doi:10.1017/S0305004112000151

〔学会発表〕（計 ８件）

① 谷川好男, 南出真, 木内功, On a sum involving the Mobius function, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学(広島県東広島市).

② 谷川好男, X.Cao, W.Zhai, Mean Square of the error term in the asymmetric many dimensional divisor problem, 日本数学会年会, 2014 年 3 月 18 日, 学習

院大学(東京都)

③ 谷川好男, 古屋淳, Mean value of the error term with shifted arguments in the circle problem, 日本数学会年会, 2014 年 3 月 18 日, 学習院大学(東京都)

④ 谷川好男, 古屋淳, 南出真, Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problems, 日本数学会九州支部例会, 2013 年 10 月 26 日, 宮崎大学工学部(宮崎県宮崎市).

⑤ Y.Tanigawa, On an evaluation of Ramanujan of a certain Dirichlet series and its generalization, The 7-th China-Japan seminar-preparatory conference, 2013 年 6 月 29 日, 近畿大学(福岡県飯塚市).

⑥ 谷川好男, On the evaluation of Dirichlet series in Ramanujan's Lost Notebook, 第 4 回沖縄数論セミナー, 2013 年 6 月 8 日, 沖縄高専(沖縄県名護市).

⑦ 谷川好男, 古屋淳, 整数点からずらした変数を持つ誤差項の平均値定理について, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 23 日, 京都大学(京都市).

⑧ 谷川好男, 古屋淳, 南出真, 4 を法とするディリクレ L-および多重 L-値の間の関係について, 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学伊都キャンパス（福岡県福岡市）.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
谷川　好男（TANIGAWA Yoshio）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：50109261

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
古屋 淳（FURUYA Jun）
浜松医科大学・医学部総合人間科学講座・教授
研究者番号： 10413890

南出　真 (MINAMIDE Makoto)
山口大学・大学院理工学研究科・講師
研究者番号: 80596552