

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540020

研究課題名(和文) 対称群のモジュラー表現にまつわる組合せ論

研究課題名(英文) Combinatorics arising from modular representations of symmetric groups

研究代表者

山田 裕史 (YAMADA, HiroFumi)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：40192794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：対称群のモジュラー表現に関連する指標表の行列式を求めた。またそれに関連して、専門家の間では知られている分割の恒等式を詳しく解析することにより、その (q,t) -アナログを導出することに成功した。アフィンリー環の表現論との関係では、基本表現のウエイトベクトルの明示的な記述を用いてシューア函数、シューアの Q 函数の不思議な関係式を発見した。

研究成果の概要(英文)：We derived the determinant of the matrices related to the character tables of the symmetric groups. We also gave a (q,t) analogue of a well-known partition identity. In connection with the affine Lie algebras, we found an interesting Schur function identities, which arose from the basic representation of the affine Lie algebra.

研究分野：表現論，組合せ論

キーワード：シューア函数 ヤング図形 対称群

1. 研究開始当初の背景

ソリトン方程式とは「ソリトン」と呼ばれる特殊解をもつ非線型可積分系の総称である。KdV 方程式は古くから有名であるが、この KdV 方程式と代数幾何学との関係は 1970 年代に問題にされ現在に至るまで研究が続いている。とくに 1980 年に佐藤幹夫が KP 理論を発表してからは KdV 方程式を特別な場合として含む KP 方程式、あるいは無限連立系である KP 方程式系とグラスマン多様体の代数幾何学が精力的に研究されている。これらの方程式系は双線型方程式、いわゆる広田方程式に書き直すことにより、摂動法を用いてそのソリトン解が求められる。故に広田良吾によるこの方法は単に微分方程式の解法をあたえるのみならず、その構造を深く知る上で非常に重要なものと位置づけられる。我々は KP 方程式系、BKP 方程式系の広田表示、そして対称群のスピノモジュラー表現論を柱としてその関係をさらに深く探って行きたい。今回はとくに対称群のスピノモジュラー表現論に重きを置きたいと考えている。研究課題は「対称群のスピノモジュラー表現論の構築に向けて」であるが、一般論を展開するのではなく、組合せ論的な、あるいは可積分系的な側面(断面?)を詳しく調べていきたい。本研究課題に関連する私自身のこれまでの研究の背景を記しておく。1990 年以降、シューア函数およびその仲間であるシューアの Q-函数について興味をもって研究してきている。最初の著しい成果は有木進、中島達洋との共同研究で得られた「被約シューア函数」の理論である。シューア函数(シューアの S-函数)において変数を「手で落とした」ものがアフィンリー環の表現論でウェイトベクトルを具体的に記述するのに便利であること、また対称群のモジュラー表現論との関係などを述べたものである。同様のアイデアはシューアの Q-函数についても適用された。一

般に Q-函数はヤング図形で添字付けられるが、与えられた Q-函数がどのウェイト空間に属するかを、ヤング図形の組合せ論を用いて明らかにした。またこの処方箋を別のもっとも簡単なアフィンリー環 $A(1,1)$ に適用することにより、シューアの S-函数と Q-函数との間の一見奇妙な興味深い関係を見出した。対称群のスピノモジュラー表現の観点から眺めることにより、スピノ分解行列を通してその意味を解明できた。この事実が発端になってスピノ分解行列そのものを研究対象と見なし始めた。標数 2 の場合のスピノ分解行列は正方向列になるが、その行列式をいくつか計算してみると 2 の冪になっていることに気がついた。単因子がすべて 2 の冪になっている、ということである。これに関しては少し後に易しい証明を与えることもできたので短いノートを書いた。またこれに関連して対称群のカルタン行列の単因子についても面白い結果を得たので、宇野 勝博と短い共著論文を書いた。またアフィンリー環の基本表現の実現に関連して「混合基底」というものを考えたが、シューア函数との関連を調べると、これが実は対称群の「一般分解行列」に非常によく似ていることがわかって来た。また「台形の Q 函数」が本質的な役割を担っているらしいこともだんだんとわかり始めている。今回の申請の主たる目的の一つは、対称群のスピノモジュラー表現と台形の Q 函数、そして BKP 方程式系との関連をさらに詳しく探ることにある。

2. 研究の目的

以上の研究をふまえて「対称群のスピノモジュラー表現論の構築に向けて」という研究課題を掲げるに至った。もちろん対称群だけに限定せず同様の取り扱いのできるワイル群や

ヘッケ環をも 射程に入っているのは言うまでもない。通常表現に 比してモジュラー表現では可積分系との組合せ論的な関係がより鮮明に見えてくることが期待される。またスピン表現を考えることにより超対称性との関連も見えてくるかも知れない、と期待するのは極めて自然である。

とにかくまず対称群のスピンモジュラー表現において何がわかっており、何がわかっていないかをきちんと見極める必要がある。シュアアの Q 関数が BKP 理論の軸になっていたことを思い起こせば、そのモジュラー版ともいえる「モジュラー・ Q 関数」が重要な研究対象になろう。そのような函数をしっかりと把握することが重要な課題である。私は以前モジュラー・シュアア函数の候補となる函数を見だし「ブラウアー・シュアア函数」と名付けていた。前々回の申請書では「名前負け」と書いた。その後、意地もあり、詳しく性質を調べていくうちに意外に「よい」のではないかと、という結論を下すに至った。一般分解行列の研究のためには、若干、定義を修正する必要があるが、この名称を持つに十分な性質を兼ね備えているということが徐々にわかり始めている。従って、その Q 函数版を構成することも意義ある仕事になろう。以上のことに関連して、もう一つ具体的目標がある。これはもう何年も前から常に問題にしており、前回、前々回の申請書にも書きながらまだ完全な理解に達していないことである。ヴィラソロ代数とブリュッカー関係式の個数の関係。脇本實との共同研究の際、フォック表現の形式的指標が佐藤によるブリュッカー関係式の個数、すなわち KP の広田方程式の個数に一致している、という事実を本質的に用いた。その時は「都合の良い偶然」といった認識だったのであるが、やはり避けては通れない問題としてその解明に力を注ぎたい。ヴィラソロと KP の関係はいわゆる共形場理

論として既に結実しているが、この個数の一致に関しては、少なくとも私はまだ納得できない。共形場理論とは異なる側面があるものと信じている。(3) 学術的な特色、独創的な点 たとえば KP, BKP 方程式系について代数幾何学、アフィンリー環の表現論の立場から研究されたことはある、というよりこの方面からの研究が主流であるが、私はここに対称群の(スピン)モジュラー表現論という視点を持ち込みたい。そもそも佐藤幹夫は KP 理論のはじめからヤング図形の組合せ論を重視しており、対称群の表現論との関係を、その本質ととらえていたフシがある。その意思を引き継いで特に(スピン)モジュラー表現論をその中心に据えて可積分系を研究する本課題は十分に独創的であろう。対称群のスピン表現で何が問題かを調べているうちに、そもそも対称群の指標表という「手垢の付いた」物に対しても、まだまだ解明すべき問題が山積していることがわかり始めた。簡単な分割の恒等式でも、その (q, t) -アナログを考えようと思えば必然的にマクドナルド多項式を精査することになる。マクドナルド多項式が可積分系の理論において果たすべき役割に思いを馳せれば、行き着くところは「可積分系、とくに KP 理論では組合せ論的な構造がその真髄である」と言い切ることができるかもしれない。

3. 研究の方法

具体的な目標を掲げると 1. 対称群のモジュラー表現論、スピンモジュラー表現論の土台を確固たるものにすること 2. 対称群の通常表現、スピン表現の指標表に関して、その組合せ論を徹底的に調べること 3. ソリトン方程式の広田表示と組合せ論となる。それぞれが独立した問題というわけではなく、相互に密

接に関連しているのは上に述べた通りだが、全体的な一般論の構築に向けて、小さなところからアタックしていきたい。

4. 研究成果

対称群のモジュラー表現に関連する指標表の行列式を求めた。またそれに関連して、専門家の間では知られている分割の恒等式を詳しく解析することにより、その (q, t) -アナログを導出することに成功した。アフィンリー環の表現論との関係では、基本表現のウェイトベクトルの明示的な記述を用いてシューア函数、シューアの Q 函数の不思議な関係式を発見した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

H. Mizukawa and HF. Yamada: Arithmetic identities for class regular partitions, Hokkaido Math. J. (to appear) (査読有り)

H. Mizukawa, T. Nakajima, R. Seno and HF. Yamada: Schur function identities arising from the basic representation of $A(2,2)$, Lett. Math. Phys. 104 (2015), 1317-1331 (査読有り)

M. Ando, T. Suzuki and HF. Yamada: Combinatorics for graded Cartan matrices of the Iwahori-Hecke algebra of type A, Ann. Comb. 17 (2013), 427 - 442 (査読有り)

[学会発表](計3件)

HF. Yamada: Combinatorics of regular partitions and character tables of the symmetric groups, International Conference on Algebraic Combinatorics, RIMS, Kyoto University, 2014年12月18日(招待講演)

HF. Yamada: Rectangular Schur functions and trapezoidal Q -functions, Shanghai Workshop on Representation Theory, East China Normal University, 2013年12月6日(招待講演)

HF. Yamada: A Combinatorics of partitions, Workshop on Algebra, Analysis and Geometry, Kagoshima University, 2013年2月18日(招待講演)

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田裕史 (HiroFumi YAMADA)
熊本大学・大学院先端科学研究部・教授
研究者番号：40192794

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

水川裕司 (Hiroshi MIZUKAWA)
防衛大学校・数学教育室・准教授
研究者番号：60531762