様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００２９

研究課題名（和文）保型超関数に付随するゼータ関数と４次形式の解析数論

研究課題名（英文）Zeta functions associated with automorphic distributions and an analytic number theory of quartic forms

研究代表者
佐藤　文広（SATO, Fumihiro）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：２０１２０８８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：An, Bn, Cn, Dn, E7型の単純代数群Gとそのある極大放物型部分群Pとから定まる可換放物型と呼ばれるクラスの概均質ベクトル空間について、その上の超関数の保型対とPの指標から誘導される退化主系列表現に属す擬保型超関数、保型超関数との関係を、付随するゼータ関数を媒介として研究した。とくに、G = SL(2)では、普遍被覆群の主系列の擬保型超関数との対応、マース波動形式に対するヴェイユ型逆定理への応用を得た。また、保型対の理論を二次写像に適用して、ある4次形式のゼータ関数を構成し、それが直交群のアイゼンシュタイン級数のケッヒャー・マースゼータ関数となることを予想し、部分的に解決した。

研究成果の概要（英文）：A prehomogeneous vector space of commutative parabolic type is determined by a certain pair of a simple algebraic group G and its maximal parabolic subgroup P, We studied a relation between automorphic pairs of distributions on a prehomogeneous vector space of this type and (quasi-) automorphic distribution vectors belonging to degenerate principal series representations of G using associated zeta functions. The case G = SL(2) was analyzed in detail and as an application we obtained a Weil-tye converse theorem for Maass wave forms. We applied the theory of automorphic pairs to quadratic mappings and constructed zeta functions associated to Clifford quartic forms. It is a conjecture that the zeta functions coincide with the Koecher-Maass zeta functions of Eisenstein series of orthogonal groups. We obtained partial affirmative results on the conjecture.

研究分野：代数学、とくに代数群の整数論

キーワード：概均質ベクトル空間　ゼータ関数　保型超関数　アイゼンシュタイン級数　二次写像

１．研究開始当初の背景

(1) 本研究に先立って、研究代表者は、双対的な非退化二次写像の組によって局所ゼータ関数の関数等式を引き戻し、関数等式を満たす新たな局所ゼータ関数を見出す方法を開発した。とくに、クリフォード代数の表現から定義される非退化双対二次写像の場合を小木曽岳義（城西大・理）とともに詳細に研究し、低次元の例外を除いてこの局所ゼータ関数は概均質ベクトル空間からは得られず、既存の理論の枠組みでとらえられないものであることを見出した。ここで、自然に現れる問題としては、大域的ゼータ関数について同様の結果が得られるかということであった。この問題に答えることが本研究の出発点である。大域的ゼータ関数を構成する方法の手掛かりとしては、もっとも簡単な二次写像である 1 次元空間への二次写像、すなわち、二次形式の場合があり、すでに 1970 年代に Rallis-Schiffmann によって二次写像の特性を生かした構成法が知られていた。また、同じく 1970 年代に荒川恒男、鈴木利明により行われた、実解析的ジーゲルアイゼンシュタイン級数のケッヒャー・マースゼータ関数の研究も、我々の問題の特殊な場合と位置づけられるものであった。田村敬太は研究代表者とともに、鈴木利明の結果を一般に概均質ベクトル空間に拡張し、概均質ベクトル空間上の超関数の保型対とそのゼータ関数の理論として定式化した。これが、本研究の準備状況である。

(2) 上に述べたのは直接的背景であるが、より広い意味での背景の中での本研究の意味を説明する。本研究と関連する先行研究としては、まず、Miller-Schmid による保型超関数とその保型 L 関数への応用の研究がある。彼らの保型超関数は保型形式の境界値として得られるものであるが、我々の概均質ベクトル空間上の超関数の保型対は、Miller-Schmid の意味での保型超関数と深い関係があり、その関係を明瞭に認識し、概均質ベクトル空間上の超関数の保型対とそのゼータ関数の理論を整備していくことが一つのテーマとなった。一方、数論的視点からは、二次写像の解析数論という見方が考えられる。実際、双対的な非退化二次写像の典型的な例は、行列空間から対称行列空間への自然な写像であるが、この二次写像の研究は Siegel による古典的な二次形式の解析数論に他ならない。我々の非退化二次写像の中には、すでに述べたクリフォード代数と結びつくケースとして、既存の理論を越えた例が存在するため、Siegel の理論を模範とする解析数論の新しい展開が期待できた。とくに、高次形式について具体的な数論的意味を持つ保型形式の構成を展望できるのである。

２．研究の目的

以上の背景を踏まえ、本研究の目的は、保型超関数に付随するゼータ関数の理論を整備し、ある種の 4 次形式の解析数論に応用することである。より具体的な目標は次のように設定された。

(1) 単純代数群とその放物型部分群から定まるいわゆる放物型の概均質ベクトル空間に対して、同じ放物型部分群の指標から誘導された退化主系列表現に属す超関数ベクトルで数論的部分群によって不変となるもの（これを保型超関数と呼ぶ）を利用して、当該の概均質ベクトル空間上に保型的な和公式（これを概均質ベクトル空間上の超関数の保型対という）を導き、さらにそこからゼータ関数を取り出す方法を整備すること。
(2) 具体的な保型形式に対応する保型超関数・保型対を計算すること、また、概均質ベクトル空間上の超関数の保型対を直接構成することにより、逆に保型形式を得ること。とくに、非退化で双対的な二次写像の組について、対応する保型形式を構成すること。
(3) クリフォード代数の表現から得られる二次写像について前項の構成を利用し、その二次写像、ないしは、二次写像と二次形式の合成から得られる 4 次形式の数論を反映した保型形式を構成すること。
(4) 以上の研究過程で派生する概均質ベクトル空間及び保型形式に関する諸問題の研究。

３．研究の方法

研究の目的 (1)、(2)を中心とし、研究協力者を含めて、月 2 回程度のセミナーを行い、研究の進展を共有しつつ研究を進めた。(3)、および、(4) そこから派生した非概均質的関数等式については、年 3 回程度の研究協力者との研究打ち合わせ会を行い、研究を進めた。最終年度には、研究成果の国際的な発表を重視し、保型超関数とゼータ関数については「JSPS－CNRS ジョイントセミナー」(2014 年 9 月、立教大学、東京）で、非概均質的関数等式については研究集会「リー群・等質空間の解析、幾何、表現論」(2014 年 12 月、モロッコ)で報告し、関連研究者との討論を行った。

４．研究成果

(1)概均質ベクトル空間上の超関数の保型対からゼータ関数を定義しその関数等式を導くことは、研究の背景の項において説明したように、本研究に先立って田村敬太および研究代表者によってなされていた。本研究では、この先行研究と退化主系列表現に属する超関数ベクトルで数論的部分群による不変性を持つものとして定義される保型超関数との関連を、可換放物型と呼ばれるクラスの概均質ベクトル空間に対し、ある程度明確に捉えることができた。可換放物型と呼ばれるクラスの概均質ベクトル空間は、A_n, B_n, C_n, D_n,

E_7型の単純代数群 G とそのある極大放物型部分群 P とから定まるが、その概均質ベクトル空間上の超関数の保型対からは自然に2つのブリュアセルの合併集合として与えられる G のある開集合上の超関数が定まる。この超関数の G 全体への延長は、ゼータ関数の極の情報によって統制されるという原理が見いだされた。次に、この延長そのものは P の指標から誘導される退化主系列表現に属すが、一般には、完全な保型性を持たず、擬保型超関数とでもいうべきものとなる。この擬保型超関数が、保型形式に対応するという意味で真の保型超関数となるためには、再び、ゼータ関数の極についての制限が必要となる。この保型対、擬保型超関数、保型超関数の概念上の区別は、G の実階数が1の場合には完全に明解であり、擬保型性は持つが保型性を持たない例も構成可能である。

(2) $G = SL(2)$の場合については、研究協力者杉山和成（千葉工業大）、宮崎直（北里大）を中心に研究代表者も参加して、詳しい研究を行った。その結果としては、概均質ベクトル空間$(GL(1), V(1))$上の超関数の一般の保型対は、$SL(2,\mathbb{R})$の普遍被覆群の主系列の擬保型超関数に対応すること、保型超関数は対応するゼータ関数の極が2点の場合に相当すること、が示された。また、この見方の応用として、マース波動形式に対するヴェイユ型逆定理（ゼータ関数の関数等式によるマース波動形式の特徴づけ）が得られた。この逆定理を用いることにより、かつて上野隆彦によって研究された二次形式に関連するある2変数のゼータ関数がマース波動形式のメリン変換となることを示せる。

(3) 概均質ベクトル空間上の超関数の保型対の構成法として、一般ジーゲル級数の方法を定式化し、非退化双対的な二次写像の組から、二次写像の局所密度の素数を渡る無限積をフーリエ係数とする保型対を構成した。この保型対は、C型の可換放物型の場合はジーゲルのアイゼンシュタイン級数の境界値から得られるものに一致する。しかし、BD型の場合は、この理論が適用される二次写像はクリフォード代数の表現から得られ、対応するゼータ関数は既知のものではなく、とくに概均質ベクトル空間のゼータ関数とはならない。ある種の4次形式（クリフォード4次形式）の場合には、直交群のアイゼンシュタイン級数と結びつくと予想される。この予想は、BD型の二次写像、および、クリフォード4次形式について、二次形式論におけるジーゲルの主定理のアイゼンシュタイン級数部分の類似物を与えるものである。この予想の証明については、2つの方向での試みに成果があった。一つは、$G=SO(p+1,1)$の場合であり、このときには、問題の保型対が擬保型超関数を与えることが示せる。さらに、$p<5$，ないしは、$4<p<10$ でクリフォード代数の表現が既約ならば、概均質ベクトル空間の理論を用いることで、保型超関数を与え保型形式に対応するところまで、示すことができる。しかし、まだ、対応する保型形式がアイゼンシュタイン級数となるところまで確認されていない。一方、$G=SO(p+1, p+1)$の場合には、局所密度のガウス和表示と、アイゼンシュタイン級数のフーリエ級数の特異級数表示との直接比較を行うことにより、問題の保型超関数がアイゼンシュタイン級数に対応することを証明することができている。一般の場合の解決は今後の課題である。

(4) クリフォード4次形式は概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないにもかかわらず、実数体上の局所ゼータ関数が関数等式を満たすという重要な例である。この例の存在により、局所ゼータ関数が関数等式を満たすような多項式、より一般に有理関数を特徴づけるという問題が発生する。この問題については、現在、最終的な解答を予想できる段階まで研究は進展しておらず、本研究では、中心的研究課題から派生したテーマとして、同様の非概均質的な局所関数等式を持つ有理関数の例を構成すること、および、それらの例に対し、関数等式の存在と深く関係するとみられる条件、とくに、ホマロイダル性との関係を検討した。まず、例の構成においては、関数等式の貼り合わせという手法を開発し、多変数ゼータ関数を考えるならば、豊富に非概均質的な局所関数等式が得られることを明らかにした。この構成は、等質錐の帰納的な構成の類似であり、等質錐に付随する可解概均質ベクトル空間に対する関数等式の明示計算に適用可能である。明示式を与えるアルゴリズムの定式化が次の課題である。ホマロイダル性については、クリフォード4次形式がホマロイダル性を持つことを確認した。これは、Kazhdan 等によって提出された「乗法的ルジャンドル変換がまた多項式となるホマロイダル多項式は概均質ベクトル空間の相対不変式に限るか」という問いへの否定的な解答である。これまで計算された例においては、局所関数等式の存在はホマロイダル性と常に結びついており、両者の関係は必要条件とも十分条件とも判明していないが、極めて緊密に関係していることは確実に思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）

① 宮崎直、(GL(1)×SO(q),V(q))上の超関数の保型対（佐藤文広氏との共同研究）、査読無、数理解析研究所講究録、1934 巻、2015、90-103

② 杉山和成、Automorphic pairs of distributions and its application to explicit construction of Maass forms, 査読無、数理解析研究所講究録、1934巻、2015、83-89

③ Fumihiro Sato, Local functional equations associated with decomposable graphs, 査読有、Josai Mathematical Monograph, 6 巻、2013、59-69

④ Fumihiro Sato, Takeyoshi Kogiso, Representations of Clifford algebras and local functional equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有、36 巻、2012、53-66

〔学会発表〕(計 14 件)

① 佐藤文広、Integrals of Wishart-Siegel type and local functional equations, “Analysis, geometry, and representations on Lie groups and homogeneous spaces”, 2014 年 12 月 09 日、Ryad Mogador Opera (Marrakech, Morocco)

② 佐藤文広、Automorphic pairs of distributions on prehomogeneous vector spaces and zeta functions, “Prehomogeneous vector spaces and related topics (JSPS-CNRS joint seminar)”, 2014 年 09 月 04 日、立教大学(東京都豊島区)

③ 杉山和成、超関数の保型形式と Maass 形式、“大阪大学整数論・保型形式セミナー”、2014 年 06 月 20 日、大阪大学理学部(大阪府豊中市)

④ 宮崎直、Automorphic pair of distributions on (GL(1)×SO(n),V(n))、“保型形式および関連するゼータ関数の研究”、2014 年 01 月 22 日、京都大学数理解析研究所（京都府京都市）

⑤ 杉山和成、Automorphic pairs of distributions and its application to explicit constructions of Maass forms、“保型形式および関連するゼータ関数の研究”、2014 年 01 月 22 日、京都大学数理解析研究所（京都府京都市）

⑥ 佐藤文広、Zeta functions of quadratic mappings, “Modular functions and quadratic forms -Number theoretic delights-“, 2013 年 12 月 22 日、大阪大学中之島センター（大阪府大阪市）

⑦ 佐藤文広、局所関数等式、超関数の保型対、ゼータ関数、”2013 年度表現論シンポジウム“、2013 年 11 月 27 日、まほろばマインズ三浦（神奈川県三浦市）

⑧ 佐藤文広、Spherical homogeneous spaces -Definition, Classification, Weyl group-, “16-th Autumn Workshop in Number theory”, 2013 年 11 月 07 日、白馬ハイマウントホテル（長野県北安曇郡）

⑨ 宮崎直、超関数の保型対と L 関数、“早稲田大学整数論セミナー”、2013 年 10 月 25 日、早稲田大学理工学術院（東京都新宿区）

⑩ 宮崎直、Automorphic pair of distributions on (GL(1)×SO(n),V(n))、“積公式と関連する話題について”、2013 年 09 月 08 日、東京大学数理科学研究科（東京都目黒区）

⑪ 杉山和成、Automorphic distributions and the converse theorem for Maass wave forms、“2nd conference on automorphic forms”, 2013 年 6 月 15 日, 京都大学理学部（京都府京都市）

⑫ 佐藤文広、On non-prehomogeneous local functional equations 、”Kyoto conference in Automorphic forms”, 2012 年 10 月 05 日、京都大学理学研究科 (京都府京都市)

⑬ 佐藤文広、分解可能グラフに付随する局所関数等式、“2012 年度城西大学理学研究科ワークショップ, Representations theory of algebraic groups and related topics”、2012 年 09 月 15 日、城西大学紀尾井町キャンパス（東京都千代田区）

⑭ 杉山和成、$SL(2,\mathbb{R})$の保型形式の境界値に付随する L-関数、“2012 年度城西大学理学研究科ワークショップ, Representations theory of algebraic groups and related topics”、2012 年 09 月 15 日、城西大学紀尾井町キャンパス（東京都千代田区）

6．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　文広（SATO, Fumihiro）
立教大学・理学部・教授
研究者番号：20120884

(2)研究協力者

杉山　和成（SUGIYAMA, Kazunari）
千葉工業大学・情報科学部・准教授
研究者番号：90375395

宮崎　直（MIYAZAKI, Tadashi）
北里大学・一般教育部・講師
研究者番号：7063241

小木曽　岳義（KOGISO, Takeyoshi）
城西大学・理学部・教授
研究者番号：20282296