

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540031

研究課題名(和文)p進球関数の明示的公式とその応用

研究課題名(英文)Explicit formulas of p -adic spherical functions and their applications

研究代表者

広中 由美子(Hironaka, Yumiko)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：10153652

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：この研究は、数論的に興味のある p -進等質空間として、特にユニタリ・エルミート行列の空間について球関数に基づく研究である。研究代表者が既に得ていた一般的な球関数の表示式を適用できる。今回作用している群は、行列のサイズの偶奇により対応するルート型は変わり、空間のカルタン分解の形は剰余体標数には依って非対角型も現れる。まず基礎体の剰余体標数が奇数の場合に、行列サイズの偶奇に分けて、球関数に基づく空間の調和解析的研究を行い、次に剰余体標数が偶数の場合を対比させながら扱った。球関数の次元やヘッケ環加群としてのシュバルツ空間の構造は、統一的な定式化ができる。

研究成果の概要(英文)：We have investigated the spaces of unitary-hermitian matrices on the basis of spherical functions as p -adic homogeneous spaces. We may apply a general expression formula of spherical functions which the researcher got before. The present groups have different root systems according to the parity of the size of matrices, and the Cartan decomposition of the spaces have different shapes according to the residual characteristic of the base field. We have studied at first the odd residual and even-size space, then the other cases. Finally we have a unified description for the results.

研究分野：数論

キーワード：p進球関数 ユニタリ・エルミート行列 ユニタリ群 p進等質空間 ヘッケ環 マクドナルド多項式

1. 研究開始当初の背景

Hecke 環の作用に関して同時固有関数となる等質空間上の関数を、球関数とよぶ。これは、等質空間上の調和解析を研究する上で基本的対象である。実数体または複素数体上の帯球関数の理論は、Harish Chandra が半単純リー群、reductive リー群について構成し、大島利雄らにより、対称空間に拡張された。一方、 p -進 reductive 群の帯球関数の理論は、F.I.Mautner、佐武一郎、I.G.Macdonald 等により、1960 年代以降展開された。群上の帯球関数の発展である等質空間の球関数は興味深い研究対象で、群の作用と共にその空間を解析する基本的道具となる。それらは、特別なモデルの球ベクトルや Shalika 関数、あるいは Whittaker-Shintani 関数として研究されてきて、保型形式の数論や表現論と密接な関係をもつ。作用する群や作用している空間が有理数体上定義されているとき、球関数は、大局的な対象 Rankin-Selberg 積や Eisenstein 級数の局所因子として現れることが知られている。

さて、 p -進球関数を基とした調和解析を、等質空間上で展開したのは、研究代表者および連携研究者 佐藤文広による交代形式の空間が群上ではない先駆例であるといえる。

そもそも、球関数の明示公式を求めることはもっとも基本的な問題の一つである。群の場合には I.G. Macdonald と、W.Casselman による表現論的再定式化で解決している。球等質空間の球関数についての Sakellaridis の一般論や研究者自身による等質空間の球関数の表示式も含め、一般論といくつかの空間の明示的結果が知られている。

2. 研究の目的

前項で記した理論の状況に基づき、本研究では、具体的に数論的にも興味深い等質空間を扱うことを目指し、特に次のような研究を目的とした。

- $SU(2n)/U(n) \times U(n)$ と同型となる SO_n 型の対称空間を以前は filber 空間として実現したが、半双線形形式の空間 SX_{2n} として実現して、 SX_{2n} 上の球関数を決定し、ヘッケ環の作用と共に SX_n を明示的に研究する。

- 半双線形形式の空間として考えるならば、サイズが奇数の SX_{2n+1} を考察することも自然である。こちらは、 SBC_n 型となる。これについても球関数論を展開する。

- 球関数の明示式に現れるワイル群に付随する特殊な直交多項式系の研究。

- さらに新たな半双線形形式や対称形式の空間への発展

3. 研究の方法

研究代表者が中心となって研究を進めた。その際に、全体として、概均質ベクトル空間の理論からの検討が必要で、連携研究者の佐藤文広氏との議論が役立っている。また、球関数論について、特に特殊な直交多項式系に関しては連携研究者の小森靖氏との共同研究として行った。

早稲田大学においては、西早稲田数論セミナーを適宜開催し、より多くの研究協力者との議論の場を設けた。また、数論関係の女性研究者の研究集会(「数論女性の集まり」WINJ5 -- WINJ8)を毎年開催し、若手女性研究者への後押しをすると同時に、数論関係の広い分野の研究者へこの研究テーマを広める一助としている。

2013 年と 2014 年の春に Strasbourg を訪問して準備を重ねた後、2014 年 9 月には、第 3 回日本・フランス「概均質ベクトル空間研究集会」を東京で開催し、自分も講演すると同時に多くの研究者と議論する場を得た。海外研究協力者の Hubert Rubenthaler 氏は中心メンバーの一人として来日された。

2015 年度は、所属する大学から特別研究期間を取得できたので、前半は主に海外研究協力者の Siegfried Boecherer 氏の所属するドイツ・マンハイム大学に滞在し、そこを基点にヨーロッパで開かれた数論の研究集会に参加したり、いくつかの大学を訪問できた。後半は京都大学数理解析研究所に滞在し、京都および来訪された研究者らと議論の場を得た。

4. 研究成果

p -進体 K の不分岐 2 次拡大 K' をとり、これについてエルミート性やユニタリ性を考える。 j_m で副対角線に 1 が m 個ならば行列を表すこととし、 $GL_m(K')$ 内で j_m を固定するユニタリ群 G_m を考える。さらにその中でエルミートな元を集めて空間 X_m を構成する。 G_m は $m=2n$ のとき SO_n 型、 $m=2n+1$ のとき SBC_n 型の群となる。基礎体 K の剰余体標数が奇数の場合にまず研究し、論文として発表した。この球関数の主要部分には SO_n 型 Hall-Littlewood(-Macdonald) 多項式の特殊化が現れて、その特殊化は m の偶奇によって異なる。球関数の定数に現れる量も「ルートの高さ」の一般化と解釈できることを示した。球関数を核関数とする積分変換により、 X_m 上の Schwartz 空間をワイル群不変な Laurent 多項式の空間に移すことができ、これが Hecke 環加群として階数 2^n の自由加群であることが分かる。

空間のカルタン分解の形は、剰余体標数が奇数のときは群 G_m のカルタン分解の代表で尽くされることが分かる。基礎体が dyadic の場合は群のカルタン分解の代表では足らずに、非対角型の元が必要となる。また、そ

の代表系の候補が重複を含まないことは、球関数の明示式の帰結として分かる。 m が偶数のときには、 2 が基礎体 k の素元の e 乗であるとする($e = v_\pi(2)$)、球関数の明示式にこの e を組み込む形で、剰余体標数が偶数の時も込めて統一的な記述ができる。その結果、球関数の次元や Schwartz 空間の Hecke 環加群としての構造も、奇標数の場合と同様となる。 m が奇数のときには、 2 -adic ($e = 1$) に限って議論を進めた。以上の結果は数理研の研究集会で口頭発表した(学会発表の)。不分岐エルミートの空間 H_n の場合には、 $GL_n(k')$ が自然に作用し、 H_n 上の球関数の主要部は A_n 型の Hall-Littlewood 多項式の特異化で表され、その結果は $v_\pi(2)$ の値には依らなかった。今回の空間との対比は興味深い。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

Y. Hironaka, Zeta functions of finite groups by enumerating subgroups, to appear in Communications in Algebra. 査読あり

Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian matrices, the case of odd size, 京都大学数理解析研究所講究録 1934 巻(2015), 104 - 117. 査読なし

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of weight lattices of compact semisimple connected Lie groups, Siauliai Math.-Semin., 10 (2015), 149--179. 査読あり

Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian matrices II, the case of odd size, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 63(2014), 47 -- 78. 査読あり

Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian matrices, International Journal of Number Theory 10(2014), 513 -- 558. 査読あり

Y. Hironaka, p -進等質空間上の球関数と表現の局所密度, 第 58 回 代数学シ

ンポジウム報告集 (2013.11), 194 -- 212. 査読なし

F. Sato, Local functional equations associated with decomposable graphs, Josai Mathematical Monograph 6(2013), 59--69. 査読あり

Y. Hironaka and Y. Komori, Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian matrices, 京都大学数理解析研究所講究録 1826 巻(2013), 110 - 128. 査読なし

[学会発表](計 17 件)

Y. Hironaka, Harmonic analysis on the space of p -adic unitary hermitian matrices, RIMS Workshop "Automorphic forms, automorphic L -functions and related topics", 2016.2.2. 京都大学数理解析研究所

Y. Hironaka, Zeta functions of finite groups, 46th Seminar Aachen - Koeln - Lille-Siegen on Automorphic Forms, 2015.10.2. Aachen(Germany)

Y. Hironaka, Zeta functions of finite groups, French-Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications, 2015.9.8. Saint-Etienne (France)

Y. Hironaka, Harmonic analysis on the space of p -adic unitary hermitian matrices, 20th Journées Arithmétiques, 2015.7.6. Debrecen (Hungary)

広中由美子, 有限群の部分群に関するゼータ関数, 日本数学会秋季総合分科会, 2014.9.25. 広島大学

Y. Hironaka, Spherical functions on certain p -adic homogeneous spaces, and some relation to PV-theory, The third Franco-Japan Seminar on Prehomogeneous vector spaces. 2014.9.2. 立教大学

Y. Hironaka, Explicit formula for spherical functions I, II, The 16th Autumn Workshop on Number Theory, 2013.11.9-10. 白馬ハイマウントホテル

Y. Hironaka, Spherical function on certain p -adic homogeneous spaces, WS on Whittaker Functions: Number Theory, Geometry and Physics, 2013.10.17. Banff(Canada)

広中由美子, p -進等質空間上の球関数と表現の局所密度, 第 58 回代数学シンポジウム, 2013.8.29. 広島大学

Y.Hironaka, Spherical functions on The space of p -adic unitary hermitian matrices, The first US-EU conference on automorphic forms and related topics, 2012.8.7. Aachen(Germany)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

広中 由美子 (HIRONAKA YUMIKO)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：10153652

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

佐藤文広 (SATO FUMIHIRO)
立教大学・理学部・名誉教授
研究者番号：20120884

小森 靖 (KOMORI YASUSHI)
立教大学・理学部・准教授
研究者番号：80343200

海外研究協力者

Rubenthaler, Hubert
Strasbourg University,
Institute of Mathematics, Professor

Boecherer, Siegfried
Mannheim University,
Institute of Mathematics, Professor