様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００３３

研究課題名（和文）混合モティーフ層と混合Ｔａｔｅモティーフの理論

研究課題名（英文）Theory of mixed motivic sheaves and mixed Tate motives

研究代表者
花村　昌樹（Hanamura, Masaki）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：６０１８９５８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：複素n次元空間の半代数的集合の上で，極をもつ微分形式の積分の理論を厳密に定式化し，収束のための幾何的な条件を与えた．また複素解析におけるCauchyの積分公式を高次元の場合に拡張した公式を与え，それを証明した．DG圏の一般化としてquasi DG圏の概念が代表者により提出されていたが，その基礎理論を構築し，とくにquasi DG圏から三角圏を構成する方法を与えた．それを用いて，任意の代数多様体上の混合モティーフ層の三角圏を構成した．混合Tateモティーフの三角圏と代数的サイクルのbar複体上のcomoduleのアーベル圏との関係を研究した．

研究成果の概要（英文）：We studied the theory of integrals of differential forms with logarithmic singularities on semi-algebraic sets; we gave a sufficient geometric condition for the convergence of the integral. Also, we formulated and proved a higher dimensional generalization of the Cauchy formula in complex analysis. We developed the basic theory of quasi DG category, a notion had been previously proposed by the investigator; in particular, we gave a method to produce a triangulated category out of a quasi DG category. Using this, we constructed the triangulated category of mixed motivic sheaves over an arbitrary algebraic variety. We studied the relationship between the triangulated category of mixed Tate motives, and the abelian category of co-modules over the bar complex of the cycle complex.

研究分野： Algebraic Geometry

キーワード： algebraic cycles　motives　 triangulated category

１．研究開始当初の背景
(1) 複素アフィン空間の半代数的集合のうえの極をもつ微分形式の積分について，厳密な基礎づけや，一般的な収束の条件の考察が欠けており，また Cauchy 公式がどのような条件の元で成立するかも正確に定式化されたことがなかった．これは混合 Tate モティーフの Hodge 実現の構成に役割を果たすはずである．

(2) 混合モティーフの三角圏と，代数的サイクルの複体の bar 複体のうえの comodule のアーベル圏は独立の考察で導入されたもので，それらの関係は明確にされていなかった．さらに，それぞれの圏の上でコホモロジー実現は定義されていたが，その比較がなされていなかった．

(3)DG 圏から三角圏を構成する理論は知られており，それは体の上の混合モティーフの三角圏の構成に使われていたが，それをどのように一般化すれば，任意の代数多様体の上の混合モティーフの圏の構成することができるか，不明であった．

(4)モティヴィックコホモロジーを，具体的な代数曲面の場合に計算すること，その意味づけは行われていなかった．

２．研究の目的
(1) 複素アフィン空間の半代数的集合のうえの極をもつ微分形式の積分について,基礎的な定理を厳密に定式化して証明する．また Hodge 実現について再考察する．

(2)混合モティーフの三角圏と，代数的サイクルの複体の bar 複体のうえの comodule のアーベル圏を比較し，実現関手も比較する．

(3)DG 圏の概念の適切な一般化を行い，それに三角圏を付随させる理論を構築し，さらに任意の代数多様体の上の混合モティーフの三角圏の構成をおこなう．

(4)正規な代数曲面に対し，モティヴィックコホモロジーの具体的な計算を行い，意味づけをする．

３．研究の方法
(1) 複素アフィン空間の半代数的集合のうえの極をもつ微分形式の積分について，半代数的集合の道具を用いる．また，代数幾何における blow-up による超平面の特異点解消(Hironaka，Spivakovsky)を用いる．

(2)圏の比較について，主に圏のホモロジー代数の手法と，Hodge 複体の三角圏の理論(Beilinson)を用いる．

(3)DG 圏の一般化について，圏のホモロジー代数の手法と，三角圏の理論を用いる．DG 圏の場合には，代表者が確立した手法をモデルとする．

(4)モティヴィックコホモロジーについて，特異点解消（正確には cubical resolution）を用いて計算を実際に行う．

４．研究成果
（1）複素アフィン空間の半代数的集合のうえの極をもつ微分形式の積分の研究．　複素 n 次元空間の半代数的集合の上で，極をもつ微分形式の積分の理論を厳密に定式化し，次の(収束の定理)を示した．

複素 n 次元空間の中の n 次元の実半代数的集合 A が各面(=座標平面の交わり)と次元の意味で横断的に交わるとする．このとき複素 n 次元空間の有理型の n 次微分形式で座標超平面において一位の極をもつものに対して，その A 上の積分が絶対収束する．

(2)Generalized Cauchy formula．複素解析における Cauchy の積分公式を高次元の場合に拡張した公式を与え，それを証明した．

複素 n 次元空間の(n+1)次元の実半代数的集合 A で各面と横断的に交わるものと，座標平面に一位の極をもつ n 次正則形式 F が与えられたとき，その A の位相的境界のうえの積分が考えられる．他方，A と各座標平面との交叉が定義され，そのうえで F の residue を積分し，その和を考えられる．Generalized Cauchy formula とは，これらが等しいことを主張する．

複素アフィン空間の実半代数的集合のうえで一位の極をもつ微分形式は混合モティーフの周期に現れる典型的な積分である．これが適切な次元に関する条件のもとで収束することはこれまで定式化されたことも証明されたこともなかった．また２次元以上の場合の Cauchy formula は，例が与えられるとその都度，確認することはされてきたが，どれだけ一般的に成り立つかについては考察されたことがなかった．

(3)混合モティーフの三角圏と混合 Tate モティーフのアーベル圏.　代数的サイクル複体を用いて定義される混合モティーフの三角圏の部分アーベル圏から，代数的サイクルの複体の bar 複体のうえの comodule のアーベル圏(これは Bloch-Kriz が導入した概念）への関手を構成し，これが essentially surjective であることを示した．
また，代数的サイクル複体が K(pi，1)条件(bar 複体の 0 次以外のコホモロジーが消えること）を満たすとき，この関手が同値であることを示した．

なお，代数的サイクルの複体の bar 複体のうえの comodule の圏から，Hodge-Tate 複体の bar 複体のうえの comodule のアーベル圏への関手が存在する．ここで Hodge-Tate 複体とは，混合 Hodge-Tate 構造の拡大群を計算する複体である．

(4) 混合 Tate Hodge 構造の圏において，Tate 構造の普遍的な反復拡大(iterated extension)を,Hodge-Tate 複体を用いて具体的に与えた．これを用いて，Hodge-Tate 複体の bar 複体のうえの comodule の圏と，混合 Tate-Hodge 構造のアーベル圏が同値であることを示した．この議論において，混合 Hodge 複体の DG 圏を従来とは異なった形で展開した．

(3)と(4)を合わせることにより，混合モティーフの圏から混合 Tate-Hodge 構造のアーベル圏への実現関手が得られる．

(5) Quasi DG 圏の研究．DG 圏の一般化として quasi DG 圏の概念が代表者によって提出されていたが，その基礎理論を構築した．Quasi DG 圏は，対象のクラスおよび，２個以上の対象の有限列に対して定まる``関数複体”および，それらの間の２種類の写像で，適切な公理をみたすものからなる．必要な公理の一部として，関数複体の各成分についての加法性と呼ぶべき適切な条件を課した．

次に，与えられた Quasi DG 圏に値を持つ C-diagram という概念を導入した．C-diagram 全体をクラスとする quasi DG 圏が存在することを以下のように示した．C-diagram の有限列に対し，関数複体および２種類の写像を適切に構成した．C-diagram の列について，対応する関数複体がやはり同じ意味の加法性をみたすことを示した．その帰結として，C-diagram のなす quasi DG 圏のホモトピー圏が加法圏であることを示した．

ついで，このホモトピー圏がそれが三角圏の構造をもつことを示した．

これを論文 Quasi DG categories and mixed motivic sheaves にまとめた．

(6) 底多様体上の代数多様体のなす quasi DG 圏の構成． 準射影多様体 S の上のスムーズな代数多様体のなす quasi DG 圏をサイクル複体を用いて構成した．基礎体上のスムーズな代数多様体で S への写像を与えられたもの全体をクラスとし，関数複体が,与えられた代数多様体の S 上のファイバー積のサイクル複体に quasi-isomorphic であるようなものを構成した．とくに，ファイバー積の higher Chow 群の合成積を定めた．

(5)の結果を用いることにより，三角圏が得られるが，これが S 上の混合モティーフ層の圏である．

これらを論文 Cycle theory of relative correspondences にまとめた．

(7) 正規代数曲面の Chow コホモロジー．一般に，代数多様体に対し，その Chow コホモロジーとホモロジーが定義される．前者は代表者により，代数多様体の simplicial resolution (正確には cubical resolution) を用いて構成された．さらに Chow コホモロジーからホモロジーへの自然な射が存在する．

代表者は,正規代数曲面 S について,その Chow コホモロジーとホモロジーの食い違いが，S の特異点解消の例外因子の Chow ホモロジーとコホモロジーの食い違いと一致することを示した．(例外因子については，その Chow ホモロジーからコホモロジーへの自然な射が存在する．)

さらに Chow コホモロジーがホモロジーと一致するための必要十分条件が，例外因子が有理樹(rational tree)をなすことと同値であることを示した．

この結果を論文 Chow cohomology of algebraic surfaces にまとめた．

(8) 正規代数曲面の Chow コホモロジー．スムーズな準射影代数多様体 S について，それをスムーズな中心 C で blow-up して得られる多様体 X を考える．X のモティーフを S のモティーフおよび C のモティーフで表す公式を証明した． この公式よりサイクル複体が blow-up についてコホモロジー的なデサントをみたすことがわかる．

さらにこの公式をもちいて,X の高次 Chow 群を S および C の高次 Chow 群で表す公式を示した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①Masaki Hanamura, Quasi DG categorie and mixed motivic sheaves, Journal of Pure and Applied algebra 219 (2015), pp. 2816-2900. （査読あり）

②Masaki Hanamura, Chow cohomology groups of algebraic surfaces, Mathematical Res. Letters, 21 (2014), 1-15. （査読あり）

③Masaki Hanamura, Theory of mixed motives, Sugaku Expositions, 27 (2014), 69-84. （査読あり）

④Masaki Hanamura, 相対的な代数的対応と混合モティーフ層，数理研講究録別冊 B44, 85-98 (2013). （査読あり）

⑤Masaki Hanamura, Relative algebraic correspondences and mixed motivic

sheaves, Proc. Japan Academy, 88 (2012), 121-126. （査読あり）

〔学会発表〕（計 4 件）

Masaki Hanamura, Integration of logarithmic forms on semi-algebraic sets, 2016 年 1 月 9 日, International Colloquim on K-theory, Tata Institute of Fundamental Research, Munbai.

Masaki Hanamura, Structure of birational automorphism groups of non-uniruled varieties, 2014 年 7 月 8 日, ``Algebraic groups and automorphisms'', 京都大学数理解析研究所.

Masaki Hanamura, Mixed Tate categories and the bar complex, 周期積分と超幾何関数, 2013 年 9 月 18 日, 玉原セミナーハウス.

Masaki Hanamura, Quasi DG categories ad mixed motivic sheaves, 2013 年 2 月１６日, 代数幾何解析セミナー, 鹿児島大学.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
花村　昌樹（HANAMURA，MASAKI）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60189587

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
寺杣　友秀　(TERASOMA TOMOHIDE)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654

木村　健一郎（KIMURA KENICHIRO)
筑波大学数理物質科学研究科・講師
研究者番号：50292496