様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 6 月 15 日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００３５

研究課題名（和文）対数ピカール多様体の幾何と応用

研究課題名（英文）Log picard varieties and their applications

研究代表者

梶原　健（Kajiwara, Takeshi）

横浜国立大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：００２５０６６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、対数アーベル多様体の幾何学、および、その応用として、対数ピカール多様体に関する研究を実施した。得られた成果は次のとおりである。弱対数アーベル多様体という概念を導入し、そのような多様体は有限表示であることを示し、またその多様体の完備モデルを構成した。対数ピカール多様体に応用し、ある退化ピカール多様体のコンパクト化が得られる。なお、対数アーベル多様体に関する研究は加藤和也氏、中山能力氏との共同研究である。

研究成果の概要（英文）：Our research studies geometry of log abelian varieties, and as its application, log Picard varieties. We mainly show the following. We introduce the notion of weak log abelian varieties, and show that such varieties are of finite presentation. We also construct their proper models. We apply these results and have compactification of some degenerating Picard varieties. The research on log abelian varieties is a joint work with Kazuya Kato and Chikara Nakayama.

研究分野：数物系科学

キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景

　退化した多様体に関する研究は、非特異多様体の研究を拡張するだけでなく、退化を利用して非特異多様体を研究する応用もある。また、退化多様体を扱う手法として、フォンテーヌ・イシュージー・加藤による対数構造の理論があり、現在、さまざまな局面に応用されている。
　本研究テーマは、退化曲線の一般ヤコビ多様体のコンパクト化を構成する問題から始まる。この研究自身は 1950 年代の井草準一氏の仕事に始まり、以降、多くの研究者により、さまざまな場合に研究が進められてきた。
　コンパクト化を構成する問題では、退化多様体上の直線束の退化を扱う必要がある。この退化として、捻れのない階数 1 の層が利用され、これらのモジュライ空間を用いてコンパクト化が構成された。このコンパクト化は、アーベル多様体の退化としても重要であり、中村郁氏や浪川幸彦氏による安定準アーベル多様体や、アレクセーフ氏による半アベリック多様体などの研究がある。また技術的な手法として、幾何学的不変式論やヒルベルト概型などの手法が用いられてきた。
　このように退化多様体のピカール多様体に関して、直線束の退化と、アーベル多様体の退化という 2 つのテーマが関係し、それぞれに関する研究が重要である。

２．研究の目的

　本研究では、対数幾何の観点から、対数的滑らかな対数多様体において、ピカール多様体論を研究する。代数多様体に対数構造を付加することにより、正規交叉多様体などの多様体を、非特異多様体のように扱うことができる。このような対数幾何の利点を生かし、さらに応用し、退化多様体のピカール多様体に関して研究を進めることが本研究の目的である。
　具体的に説明すると、対数ピカール多様体を対数アーベル多様体として構成することや、退化多様体のピカール多様体のコンパクト化や自己双対性など、このような多様体にみられる幾何学への応用を調べる。
　本研究における対数幾何学のすぐれた特徴として、上に述べた退化があっても非特異のように扱えるだけでなく、群構造を備えた対数アーベル多様体の理論がある。従来の研究では、半アーベル多様体やそのコンパクト化（安定準アーベル多様体や安定アベリック多様体など）など、群多様体にする方法が存在しない。一方、対数アーベル多様体は、対数代数空間を用いると、群構造を持つ対象ととらえることができる。そのため、この方面の研究において、対数アーベル多様体論は重要である。

３．研究の方法

以下の方法で主に研究を実施した。

(1)　対数アーベル多様体の完備モデルを構成するために、代数空間のアルチンの判定法を用いた。完備性には、形式幾何と代数幾何との対応に関する議論が必要となる。
　この種の議論を簡易化するために、弱対数アーベル多様体という概念を導入した。弱対数アーベル多様体では、偏極そのものではなく、退化を統制する加群の対合に関する非退化性と許容性が仮定されている。この対数アーベル多様体に対して、完備モデルの構成を研究する。

(2)　アルチンの判定方法を完備モデルの構成に用いるには、ネーター概型などの有限型や有限表示性が必要である。これらの有限性を調べるために、対数楕円曲線の研究で得られた成果を利用する。具体的に説明すると、対数楕円曲線で用いたモデルから対数楕円曲線を再構成する方法を、弱対数アーベル多様体に拡張する。この方法では、対数エタール位相だけでなく、クンマー対数エタール位相も利用する。

(3) 弱対数アーベル多様体の偏極や射影モデルを研究するために、弱対数アーベル多様体上に、偏極を弱めた代数的構造を考える。これはトーラスの指標群の対合と両立する準同型である。この構造を仮定して、弱対数アーベル多様体上の双拡大を調べる。偏極を弱めた構造を用いる理由は、弱対数アーベル多様体の概念と同様、技術的な簡易性および拡張性の利便性のためである。

(4) 射影モデルを構成するために、テータ関数の理論を参考にする。テータ関数について、３次構造を用いた代数的な定式化を利用する。また偏極を弱めた代数的構造を偏極の代わりに利用する。この構造は（３）で述べた構造であり、テータ関数の場合にも有用である。このような構造を仮定して、テータ関数を調べる。

(5) 対数ピカール多体の完備モデルを調べるために、対数アーベル多様体の完備モデルについて研究する。次に、対数ピカール多様体の性質として、自己双対性を調べる。とくに、半安定完備代数曲線の場合について調べる。具体的に述べると、ピカール多様体や対数ピカール多様体を定める１モチーフや対数１モチーフ上の偏極や双拡大について調べる。

４．研究成果

　得られた研究成果は主に、以下のとおりで

ある。なお、対数アーベル多様体に関する研究成果は加藤和也氏、中山能力氏との共同研究である。

（１）弱対数アーベル多様体という概念を導入し、この多様体の完備モデルを研究した。主要な結果は、退化を制御する錐における完備扇に対して、対数アーベル多様体の完備モデルを構成した。ここで完備モデルは、対数構造を備えた対数代数空間である。

従来、退化アーベル多様体のコンパクト化はさまざまな観点から研究され、設定した問題に対応していろいろ構成されてきた。この研究結果は、これらのさまざまなコンパクト化が、対数アーベル多様体として、統一してとらえられることを示唆しており、今後、対数アーベル多様体論の応用が期待される。

また弱対数アーベル多様体の完備モデルの応用として、例えば対数ピカール多様体に対しても完備モデルが構成される。これにより、退化ピカール多様体のコンパクト化が得られる。

（２）弱対数アーベル多様体の有限表示性を証明した。証明では、普遍対数楕円曲線の構成と同様のアイデアを利用する。具体的に説明すると、よい性質を持った錐で定義される概型とおよび、その錐をべき乗によって同様に定義される概型で被覆して、弱対数アーベル多様体を記述する。その際に、概型の有限表示性と、被覆する性質が証明の要点である。被覆を考えるために、弱対数アーベル多様体の位相として、クンマー対数エタール位相を利用する。

弱対数アーベル多様体に関するこのような性質は、整数環上有限生成な環の上で定義された多様体に帰着するために、重要である。また完備性を議論する上で必要な性質でもある。

（３）弱対数アーベル多様体のねじれ点のなす加群が、アーベル多様体と同様の性質を持つことがわかった。すなわち、弱対数アーベル多様体のねじれ点のなす加群は、その位数が標数で割り切れないとき、その次元の２倍の階数の加群になることがわかった。

従来、退化アーベル多様体として、群多様体である半アーベル多様体を考える場合、ねじれ点のなす加群は代数的トーラスの次元の分だけ、加群の階数が減少する。

また半アーベル多様体のコンパクト化、ないしそれに相当するものでは、群構造がないため、ねじれ点にあたることを考えるには、工夫が必要となる。一方、対数アーベル多様体では、アーベル多様体と同様に群構造を利用でき、自然な定式化により、定階数の加群が得られる。この点は従来の理論にない新しい点であり、対数アーベル多様体の有用性を示している。

（４）対数アーベル多様体の射影モデルについて研究をすすめた。これは対数アーベル多様体の偏極や双拡大の研究である。この研究の過程で、対数アーベル多様体の偏極を少し弱めた代数構造を導入した。偏極を弱めたこの構造を仮定して、従来、研究されていた退化アーベル多様体を、この意味の対数アーベル多様体に拡張した。具体的に説明すると、退化アーベル多様体のコンパクト版で考察されていた扇を、対数アーベル多様体に拡張した。

この成果は、弱対数アーベル多様体の完備モデルと同様に、対数アーベル多様体が従来、研究されているさまざまなコンパクト化を統一的に扱える可能性を示唆している。

また、完全退化の場合に、対数アーベル多様体上の双拡大からテータ関数が得られる仕組みを解明した。これにより、退化アーベル多様体の指標群とテータ関数や偏極の関係が、対数幾何学において明らかになった。

対数幾何学では、構造層の可逆層に伴う主束の退化について、対数構造の群化に伴う主束を利用できる。テータ関数についても、同様に対数構造の群化に伴う主束に拡張されることが期待される。

（５）弱対数アーベル多様体の完備モデルによって、対数ピカール多様体の完備モデルが得られた。これにより、対数幾何学の範疇において、直線束の退化をとらえることができ、さらに退化ピカール多様体のコンパクト化が得られた。

従来の理論と比べると、コンパクト化だけでなく、そのコンパクト化を含む形で自然な群構造が定義された対象が得られている点が重要である。この点は対数幾何学で本テーマを扱う利点であり、さらなる応用が期待される。

対数ピカール多様体に関する双対性を調べた。対数アーベル多様体として定退化であるような対数ピカール多様体の場合に、対数１モチーフの双対性を用いる。とくに、対数的滑らかな半安定完備曲線の対数ヤコビ多様体について、その自己双対性は一般ヤコビ多様体上のテータ因子による主偏極の構成に帰着されることがわかった。

対数ピカール多様体では、対数アーベル多様体の双対性という、自然な概念によって、自己双対性がとらえられ、その主張もきわめて簡明になる。また、直線束の退化を扱う上で生じる難しさから、従来、既約な完備代数曲線で進められていた研究が、既約とは限らない曲線まで拡張される。この点も、対数幾何学を利用した研究におけるすぐれた点である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１　件）
1. Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part IV: proper models, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, accepted.

６。研究組織
(1)研究代表者
梶原 健 (KAJIWARA TAKESHI)
横浜国立大学・工学研究院・教授
研究者番号：00250663

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：