2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００３６

研究課題名（和文）非一般型代数曲面のガロワ埋め込みの研究

研究課題名（英文）Study on Glois embedding of surface of non-general type

研究代表者
吉原　久夫（Yoshihara, Hisao）

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：６０１１４８０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：ガロワ点の概念を般化した、代数多様体のガロワ埋め込みの研究を具体的対象について行った。楕円曲線を４次の完備一次系で埋め込んだときのガロワ群とガロワ直線の配置を詳細に決定した。また、代数曲面のうち、非一般型のものに関してガロワ埋め込みが存在するかどうかの研究も行った。特に、bi-elliptic surface については存在しないことが判明した。さらに、ガロワ埋め込みを持たない場合にガロワ閉包多様体の研究も非特異３次多様体に行った。

研究成果の概要（英文）：We have studied Galois points for plane curves and some hypersurfaces, after that we have generalized the concept of it and defined Galois embedding of algebraic varieties. Here we study on the Galois embeddings of conclete algebraic varieties. For elliptic curve we embedd it by complete linear system and study the arrangement of Galois lines. For algebraic surface of non-general type we consider if there exists the Galois embedding, in paticular bi-elliptic surface has no Galois embedding. In case some algebraic variety has no Galois embedding, we consider the Galois closure variety, especially we take such variety as smooth cubic.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ガロワ埋め込み　ガロワ群　ガロワ直線　ガロワ閉包多様体

１．研究開始当初の背景

ガロワ点の概念は研究代表者によって２０年近く前に得られた。当初は平面曲線で特異点のない場合、その後は特異点も許す場合に研究は進み、標数が正の場合まで進展していた。さらに、一般次元であるが超曲面に関しても基本的な問題について諸問題は解決していた。一方余次元が２の場合には、ガロワ直線の研究になるが、これに関する成果も基本的な問題についてであるが、空間楕円曲線に関して得られていた。それらの成果を踏まえて、ガロワ点の考えの一般化として、研究代表者によってガロワ埋め込みの概念が導入された。この研究の試金石としてアーベル曲面のガロワ埋め込みの研究を行い、ごく基本的な問題についての研究成果があった。

２．研究の目的

射影代数多様体の諸性質が新たな視点からの研究により判明すると期待される。その視点とはガロワ点、さらにはガロワ埋め込みの研究である。この研究を２０年近く続けてきた。国内外の研究者の協力も得て、成果も充実してきた。特に平面曲線に関する研究では基礎体の標数が正のときまで込めてかなり完成している。また、一般次元でも超曲面では多くの成果が得られている。しかし、これらは射影空間内に存在する多様体である。より一般に埋め込みまで考えて、ガロワ点の概念を一般化したものがガロワ埋め込みの概念である。この考えのもとに楕円曲線や、代数曲面のガロワ埋め込みの研究を続けておりアーベル曲面では基礎的な問題の解決もできた。しかし、その他のクラスではまだほとんど研究されていない。当該研究では一般的でない代数曲面あるいはそれに関係する多様体に関してガロワ埋め込みの研究を行うことである。

３．研究の方法

n 次元非特異射影多様体 V と、その上の very ample divisor D に対して、完備１次系 |D| に付随した埋め込み f : V → **P**^N を考える。W を **P**^N の N − n − 1 次元１次多様体で、f(V) との交わりはないとする。このとき、W 中心の射影を p とすると、π=pf: V → **P**^n は全射正則写像である。k(V) を V の有理関数体とすると、π は関数体の有限次拡大 k(V)/π*k(P^n) を惹き起す。この拡大は W によって決まるので k(V) の π*k(**P**^n) 上のガロワ閉包を K_W として、ガロワ群 G_W=Gal(K_W/π*k(**P**^n)) を f(V) の W でのガロワ群という。特に、拡大 k(V)/π*k(**P**^n) がガロワ拡大のとき、W をガロワ部分空間といい、このような部分空間が存在するような埋め込みをガロワ埋め込みという。また、V_W は正規射影多様体で K_W を関数体にもち、 V_W → V が有限射になるものを、π：V → **P**^n の Galois closure variety という。なお、W の次元が０のとき、ガロワ点、次元が１のとき、ガロワ直線という。本研究ではこの方法によって、射影多様体を新たな視点から研究するものである。この際考察のポイントとなるのは多様体の自己同型群を考察することと、多様体の間のガロワ被覆を考察することである。具体的な研究実施プログラムは以下の通りである：

（１）V のガロワ埋め込みを与える因子 D が存在するための V と D の条件は何か。

（２）埋め込まれた f(V) に対して、どのくらいガロワ部分空間が存在するか。またその配置はどのようなものであるか。

（３）ガロワ埋め込みに対して、G_W の PGL(N, k) への表現を求める。特に、抽象群としての G_W の構造を決定する。

（４）ガロワ埋め込みに対して、ガロワ対応を考察する。すなわち、G_W の部分群に対してどのような多様体が対応するか決定する。

（５）W がガロワ部分空間でないとき、群 G_W および Galois closure variety の構造を調べる。

（６)W と W' が近くにあるとき、K_W と K_W' は同型でないと予想されるが、このことを調べる。

４．研究成果

（１）楕円曲線 E を４次の完備一次系で埋め込んだときのガロワ直線の配置を完全に決定した。このとき、もっとも困難な場合は E が０を固定する、４次の自己同型をもつときである。すなわち j=12^3 のときである。それ以外のときはガロワ群がクラインの四元群V_4 であるガロワ直線 V_4 line は６本あって、それらは四面体の辺を構成している。しかし、４次の自己同型がある場合には群として４次巡回群もあり、それに対応する Z_4 line も存在して、それらは四面体の各頂点に２本ずつあり、合計８本あることが分かり、さらにそれの配置の決定も必要になる。このとき、Weierstrass のペー関数への自己同型の作用の計算が難しく、計算機を使うことにより解決した。そのため想定外の時間がかかってしまった。

（２）平面３次曲線 C に対して、曲線外の１点からの射影を考えると、C → **P**^1 はほとんどの場合ガロワ被覆とならない、このときガロワ閉包曲線は種数４の空間６次曲線となる。逆に空間６次曲線でガロワ直線を持ち、そのガロワ群が６次の二面体群であるようなものは、平面３次曲線のある点からの射影のガロワ閉包曲線となる。これを一般的に考察した。すなわち、V を n 次元多様体で V 上に因子 D で D^n = 6 かつ H^0(V, O(D)) の次元が n + 3 となるものがあると仮定する。このとき、V は **P**^(n+1) の非特異３次多様体のガロワ閉包多様体として得られる。

（３）bi-elliptic surface S に関してはガロワ埋め込みを持たないことが次のようにして判明した。S の自己同型群の有限部分群

をGとして、S/Gが非特異とすると、これはやはり bi-elliptic surface かまたは ruled surface で種数が1のものである。つまり射影平面とはなりえないので、副産物として S はガロワ埋め込みを持たないことが判明する。
（４）n 次元射影空間の d 次ガロワ埋め込みについて、n=1 のときは、P^1 の(有限位数)自己同型群のすべて、すなわち、多面体群が現れる。ちなみに、特異点も許した平面有理曲線のガロワ点の場合も同様である。そこで次元をあげて考察をすることにした。群が非可換のときは未完成で、可換のときは群は d 次巡回群の n 個の直和である。さらに、座標系を適当に選ぶと射影 P^n → P^n は (X_0, X_1, …, X_n) → (X_0^d, X_1^d, … X_n^d) の形にできることもわかる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）
(1) S. Bannai and H. Tokunaga,
Geometry of bisections of elliptic surfaces and Zariski N-plets for conic arrangements, Geom. Dedicata 査読有 178(2015), 219-237
(2) H. Kojima,
Normal log canonical del Pezzo surfaces of rank one with unique singular points, Nihonkai Math. J. 査読有, 25(2014), 105—118
(3) H. Tokunaga
Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers, J. Math. Soc. Japan 査読有, 66(2014), 613—640
(4) S. Kondo and I. Shimada,
The automorhism group of a supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, Int. Math. Res. Not. IMRN 査読有 (2014)1885--1924
(5) H. Yoshihara,
Sextic variety as Galois closure variety of smooth cubic, World Sci. Publ. Hackensack, NJ, 査読有 (2013), 300—313
(6) H. Kojima,
Open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension one, Affine algebraic geometry, World Sci. Publ. Hackensack, NJ, 査読有, (2013), 135—159
(7) H. Kojima,
Supplement to “Normal del Pezzo surface of rank one with log canonical singularities” by Kojima and T. Takahashi, J. Algebra, 査読有, 377(2013), 312--316
(8) H. Yoshihara
Galois lines for normal elliptic space curves, II, Algebra Colloq. 査読有 19(2012) 867—876
(9) H. Tokunaga,
A note on quadratic residue curves on rational ruled surfaces, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, 63(2012) 565—577
(10) M. Ishizaka and H. Tokunaga
On local trigonal fibrations, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有 140(2012) 3677—3686
(11) H. Tokunaga,
Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations, Kodai Math. J. 査読有 35(2012) 78 – 104
(12) K. Konno
On the Yau cycle of a normal surface singularity, Asian J. Math. 査読有, 16(2012), 279—298

〔学会発表〕（計 12 件）
(1) 徳永浩雄
楕円曲面と分岐被覆、ホッジ理論と代数幾何学、大阪大学、２０１５年３月１２日
(2) 吉原久夫
Abelian embeddings of P^n, 代数幾何学研究集会ー宇部ー、宇部工業高等専門学校２０１５年1月２４日
(3) 吉原久夫
Galois embeddings of P^n, 影多様体の幾何とその周辺、高知大学、２０１４年１１月１日
(4) 吉原久夫
Abelian embeddings of P^n、Workshop on Galois point and related topics、滋賀大学、２０１４年9月１４日
(5) 徳永浩雄
有理楕円曲面上の section および bisection の幾何、函館数論幾何ワークショップ、函館中央図書館、２０１４年5月２７日
(6) 徳永浩雄
Geometry of sections of elliptic surfaces and its applications, 射影多様体の幾何とその周辺、高知大学、２０１３年１１月２日
(7) 徳永浩雄
Geometry of sections of elliptic surfaces and its application, 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, Nice (France), ２０１３年9月２０日
(8) 徳永浩雄
Elliptic surfaces and Zariski pairs for conic –line arrangements, Joint international meeting of American Math. Soc. and Romania Math. Soc. Alba-Iulia, ２０１３年6月２９日
(9) 吉原久夫
J=12^3 の楕円曲線の４次埋め込みの Galois line の配置、山形大学理学部、２０１３年9月１５日
(10) 徳永浩雄
Geometry of sections of certain rational

elliptic surfaces and its application, 代数幾何学城崎シンポジウム、豊岡市、２０１２年１０月２３日
(11) 吉原久夫
Galois group at each point for some self-dual curve, Workshop on Galois point and related topics, 山形大学理学部、２０１２年９月１５日
(12) 徳永浩雄
楕円曲面の群構造を利用した平面曲線の構成とその応用について、代数幾何とその周辺、北海道大学、２０１２年８月６日

〔図書〕（計 0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://hyoshihara.web.fc2.com/

６．研究組織
(1)研究代表者
吉原　久夫（YOSHIHARA, Hisao）
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号：60114807

(2)研究分担者
徳永　浩雄（TOKUNAGA, Hiroo）
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：30211395

(3)連携研究者
金銅　誠之（KONDO, Shigeyuki）
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号：50186847

今野　一宏：(KONNO, Kazuhiro)
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：10186869

小島　秀雄（KOJIMA, Hideo）
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：90332824