様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１３４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００３７

研究課題名（和文）アフィン・ファイブレーションの可換環論的研究

研究課題名（英文）Study of affine fibrations

研究代表者
小野田　信春（Onoda, Nobuharu）

福井大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：４０１６９３４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：可換環論およびアフィン代数幾何学の双方で重要なアフィン・ファイブレーションに関して研究を行い、いくつかの結果を得た。特に、可換環 A が2次元正則局所環 R 上に有限生成性となるためのファイバー条件を決定し、さらに、その条件が満たされない場合は有限生成とならないことを示す具体例を構成した。また、可換環上べき等元で生成される環と可換群による群環の剰余環として得られる環の関係について調べ、両者が一致するための条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：Some results are obtained regarding affine fibration which is an important subject both in commutative algebra and affine algebraic geometry. In particular, fibre conditions are given for algebras A to be finitely generated over a two dimensional regular local ring R, and examples are constructed to show the necessity of the conditions. Moreover conditions are given for the equivalence between the class of algebras generated by idempotents and the class of algebras which are quotients of group algebras of commutative groups.

研究分野：可換代数学

キーワード：代数学　可換環論　アフィン代数幾何学

１．研究開始当初の背景

(1) 可換ネーター環Rと R-代数Aが与えられたとき、R の素イデアル P に対し、A_P/PA_P をP上Aのファイバー環という。ファイバー環はAのR-代数としての構造を反映するが、逆にP上Aのファイバー環の構造がRの各素イデアルPに対して与えられたとき、そこから A の構造について何が導けるであろうか。これは、幾何学的にも意味のある、可換環論における興味ある問題の一つである。この問題で、もっとも基本的なのは、P上Aファイバー環がすべて基礎体k(P)上のn変数多項式環になる場合、すなわち、

(*) $A_P/PA_P=k(P)^{[n]}$

となる場合である。ただし、k(P)はR/Pの商体を表し、$B^{[n]}$は環B上のn変数多項式環を表す。この条件を満たすとき、A は R 上の $\boldsymbol{A}^n$-fibration と呼ばれる。$\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造に関する研究が始まったのは 1970 年代後半からであるが、もともとは deformation に関連するアフィン代数幾何学的な問題意識が出発点である。その後、1980 年代後半に浅沼照雄らの貢献で、$\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造と性質に関する研究がかなり進展した。

(2) 1980 年代の研究を受け、私はファイバー条件(*)において、n=1であり、かつこの条件が高さ１以下のすべての素イデアルPについて成り立つようなAについて考察した。このようなAはcodimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration と呼ばれる。過去に採択を受けた科研費により、Bhatwadekar および Dutta と共同して codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration について詳細に研究した結果、R はネーター正規局所環かつAはR上忠実平坦という仮定の下で、その構造を完全に決定することに成功し、さらに、従来知られていた結果は、すべてその構造定理から導けることを示した。

これは、十分満足できる成果であるが、ただし、A の忠実平坦性を仮定していて、応用面では若干不満が残る。平坦性を外した場合を考察する過程で導入したのが、後述する「$\boldsymbol{A}^1$-patch」の概念である。前回採択を受けた科研費による研究で、Rが体k上２変数多項式環の場合について詳細に調べた結果、$\boldsymbol{A}^1$-patch は R 上有限生成かつ平坦になるということを示すとともに、分類と同型類の決定も完全に完成させた。

以上が研究開始当初の背景である。

２．研究の目的

(1) 上述した研究の背景を踏まえ、アフィン代数幾何学への応用を念頭に、可換環論における次の一般的な問題を考える。

『Rを可換ネーター環、AをR-代数、ΓをRの素イデアルの集合とする。Γの各要素Pに対してファイバー環A_P/PA_Pの構造が与えられているとして、A の構造を決定せよ。』

本研究の目的は、これまでの研究成果に基づき、この問題に関する３つの課題を設定して考察することである。

(2) 設定した課題は、具体的には以下の通りである。

1. ネーター正規環R上の $\boldsymbol{A}^1$-patch がR上有限生成となるための条件を求めよ。

2. ネーター正規環R上の$\boldsymbol{A}^2$-fibrationの構造を解明せよ。

3. 離散付値環R上の$\boldsymbol{A}^n$-fibrationの構造を解明せよ。

いずれもまだ解明の進んでいない重要な問題であるが、相互に強い関係がある。ファイブレーションを軸に、関連する課題を有機的に考察しようというのが本研究の独創性と特色であり、成果を通して可換環論およびアフィン代数幾何学の発展に寄与することを狙いとしている。

３．研究の方法

(1) まず、本研究には、これまでに引き続き、海外共同研究者として、Bhatwadekar 教授（Bhaskaracharya Pratishthana、インド）と Dutta 教授(Indian Statistical Institute、インド）に加わっていただいた。

(2) 今回の研究は過去の研究の発展であり、関連するいくつかの結果を得ているので、それらを利用すると共に、その際に行った考察を深化させることで解決を目指す。そのための具体的な方法は次のとおりである。

・国内外の各地の研究者と随時研究連絡、討論、打合せ等を行う。
・海外共同研究者とは、普段は e-mail 等により情報交換を行うが、年に一度、海外共同研究者のもとに出張して直接討論する。
・コンピュータを利用して、計算の効率化を図る。
・研究成果の複写を各地に送り、情報交換を行う。
・各種シンポジウム、セミナー等に出席し、研究経過及び成果を発表する。

４．研究成果

(1) まず、研究対象の一つである $\boldsymbol{A}^1$-patch について説明する。以下、R はネーター整閉整域とする。R-代数Aに対し、Rの元 x, y が存在して３条件

$$R = R_x \cap R_y$$
$$A_x = R_x^{[1]},\quad A_y = R_y^{[1]}$$
$$A = A_x \cap A_y$$

が成立するなら、A は R 上 x,y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch であるという。ただし、R_x=R[1/x]である。この $\boldsymbol{A}^1$-patch については、前回採

択を受けた科研費による研究でいくつかの成果を出しているが、今回の研究で新たに次を得た。

定理 1 p，q，r を正の整数として、$R=\mathbf{C}[X,Y,Z]/(X^p+Y^q+Z^r)$, $C=R[U,V]/(xU+yV+z)$ とおき、$A = C_x \cap C_y$ とする。ただし、$\mathbf{C}$ は複素数体を表す。このとき、$(x,y)A=A$ が成り立つなら、$(n-1)r(p+q)>npq$ を満たす自然数 n が存在する。

上の定理における A は R 上の $\boldsymbol{A}^1$-patch であることに注意する。$\boldsymbol{A}^1$-patch に関しては、この定理以外に、体 k 上 3 変数多項式環 $R = k[x,y,z]$ を含む環 A が、$A_x=R_x^{[1]}$, $A_y=R_y^{[1]}$, $A_z=R_z^{[1]}$ を満たすとき、A の R 上の有限生成性について考察し、部分的な結果を得ることができた。

(2) 研究目的に掲げた 3 つの課題については、その解決に向けて、これらに関連する次の問題を新たに設定した。

問題 2 次元正則局所環 R 上の環 A について、A が R 上有限生成となるための条件を求めよ。

今回の 3 課題の研究は、主として上の問題の考察を中心に行った。この問題についても、前回採択を受けた科研費による研究でいくつかの結果を得ているが、今回の研究で以下に述べるようにそれらを大きく発展させることができた。

基本となるのは、以前に Dutta との共同研究で得た次の 2 つの定理である。

定理 2 剰余体 k，商体 K をもつ完備離散付値環 (R,t) について、k の代数閉包 k’は k の有限次拡大とする。また A は R を含むネーター整域で、A[1/t]は K 上有限生成かつ A の R 上の超越次元は 1 とする。このとき、A は R 上有限生成である。特に、A が 1 変数多項式環 R[X] のネーター部分環なら、A は R 上有限生成である。

定理 3 (R,t) は剰余体 k，商体 K をもつ完備離散付値環とし、A は R を含む Krull 環で、A[1/t]は K 上有限生成かつ A の R 上の超越次元は 1 とする。このとき、A が R 上有限生成となるための必要十分条件は、tA の任意の付随素イデアル P について、A/P が k 上超越的となることである。

この定理を R が 2 次元の場合に拡張することについて研究した。基礎となるのは、次の定理 4 と定理 5 である。いずれも今回の研究で新たに得られた結果で、それぞれ、定理 2、定理 3 の一般化になっている。

定理 4 剰余体 k，商体 K をもつ 1 次元完備局所整域 (R,m) について、k の代数閉包は k の有限次拡大とする。A は R を含むネーター整域で、$S^{-1}A$ は K 上有限生成かつ A の R 上の超越次元は 1 とする。ただし、S は R の非零元の集合とする。このとき、A は R 上有限生成である。

定理 5 R は 1 次元 Nagata 整域、A は R を含む Krull 環で、R 上の超越次元は 1 とする。さらに、R の元 t で、B[1/t]が R[1/t]上有限生成となるものが存在すると仮定する。このとき、A が R 上有限生成となるための必要十分条件は、tA の任意の極小素イデアル P について、$p = P\cap R$ とおくとき、A/P が R/p 上超越的となることである。

さらに、次の定理を示したが、これも後述する主定理の証明に必要である。

定理 6 (R,m) は剰余体 k をもつ 2 次元 Nagata 整域とし、A は Krull 環またはネーター整域で、R を含み、R 上の超越次元は 1 とする。さらに m の元 t で、A[1/t]は R[1/t]上有限生成かつ A/tA の任意の付随素イデアル P について、$p=P\cap R$ の高さが 1 なら、A/P は R/p 上超越的とする。このとき、以下が成り立つ。

(ｲ) 任意の 0 でない m の元 f に対し A[1/f]は R 上有限生成である。

(ﾛ) tA の付随素イデアル P について、$p=P\cap R$ の高さが 1 とする。このとき A/P の R/p 上の超越次元は 1 であり、さらに、P は R に関して次元公式を満たす。

(ﾊ) (ﾛ)と同じ条件のもとで、さらに R は完備でかつ k の代数閉包は k 上有限次拡大とする。また、A が Krull 環であるケースについては A/P はネーター環とする。このとき、A/P は R/p 上有限生成である。

次の定理は、前回採択を受けた科研費の研究で得たものであるが、今回の研究においても極めて重要な役割を果たす。

定理 7 R は優秀正規環 (excellent normal domain) とし、また、A は R を含む正規環とする。さらに、f は A の非零元で、以下の 3 条件を満たすとする。

(a) A[1/f] は R 上有限生成である。

(b) A/fA は R 上有限生成である。

(c) fA の任意の極小素イデアル P について、P は高さが 1 であり、かつ、R に関して次元公式を満たす。

このとき、A は R 上有限生成である。

以上の準備の下で、主定理として次を得た。

定理 8 (R,m) は剰余体 k の代数閉包が k 上有限次拡大であるような 2 次元完備ネーター局所環とし、A は R を含み、R 上の超越次元が 1 である Krull 環とする。さらに m の元 t

で、$A[1/t]$がR上有限生成、かつ、tAの任意の付随素イデアルPについて$p=P\cap R$の高さは1であるようなものが存在するとする。このとき、以下の条件は互いに同値である。
(i)　AはR上有限生成である。
(ii)　Aはネーター環で、任意のtAの付随素イデアルPについて、A/PはR/p上超越的である。
(iii) A/tAはネーター環で、tAの任意の付随素イデアルPについて、A/PはR/p上超越的である。
(iv)　tAの任意の付随素イデアルPについて、A/Pはネーター環で、R/p上超越的である。

この主定理から次の2つの系を導いた。

系 9　(R,m)は上の定理8と同じとし、AはRを含み、R上の超越次元が1であるようなネーター整域とする。mの元tで、$A[1/t]$がR上有限生成、かつ、tAの任意の付随素イデアルPについて、$p=P\cap R$の高さは1でA/PがR/p上超越的となるものが存在したとする。このとき、AはR上有限生成である。

系 10　(R,m)は剰余体kの代数閉包がk上有限次拡大であるような2次元完備正則局所環とし、Aはネーター整域でR上平坦かつR上の超越次元は1とする。mの元tで、$A[1/t]$がR上有限生成、かつ、tAの任意の付随素イデアルPについて、A/PがR/p上超越的となるものが存在したとする。このとき、AはR上有限生成である。

主定理では、A/PがR/p上超越的となる場合を扱っているが、そうでない場合については、次の定理を証明した。

定理 11　(R,m)は定理8と同じとし、AはRを含みR上超越的なKrull環とする。mの元tで、$A[1/t]$はネーター環で、かつ、tAの任意の極小素イデアルPについて、$p=P\cap R$の高さは1でA/PがR/p上代数的となるものが存在したとする。このとき、次の条件は互いに同値である。
(i)　Aはネーター環である。
(ii) A/tAはネーター環である。
(iii) $mA=A$である。

次に、主定理（定理8）について、所与の条件が満たされない場合は、この定理は一般的に成立しないことを示す例を構成した。例を構成する際には、以下の2定理を証明して活用した。

定理 12　Rはネーター整閉整域、uはRの0と異なる素元、DはRを含む整域で、次の3条件を満たすとする。
(a)　$D[1/u]=R[1/u][X]$である。
(b)　uDは素イデアルかつ$uD\cap R=uR$である。
(c)　DのuDでの局所化は離散付値環である。

このとき、
$A=R[X]\cap D$, $P=uR[X]\cap A$, $Q=uD\cap A$
とおけば、次が成り立つ。
(i)　AはKrull環である。
(ii)　等式$uA=P\cap Q$が成立する。
(iii) Pの任意の非零元fに対して、等式$A[1/f]=D[1/f]$が成立する。また、Qの任意の非零元gに対して、等式$A[1/g]=R[X][1/g]$が成立する。

定理 12　R、D等は上の定理と同じとする。このとき、次が成り立つ。
(i)　$P+Q=A$ならば、A/uAはA/PとA/Qの直積と同型である。
(ii)　uDがDの極大イデアルなら、Dはネーター環である。
(iii) Dがネーター環かつ$P+Q=A$ならばAはネーター環である。
(iv)　DがR上有限生成かつ$P+Q=A$ならば、AはR上有限生成である。

(3)　研究目的の新たな展開として、可換環R上べき等元で生成された環に関する研究を行った。次の2つの種類の環を考える。

(イ)　可換環R上べき等元で生成される環
(ロ)　R上の可換群Gによる群環RGの剰余環として得られる環

基礎環Rが代数閉体のときは、このふたつは同じ種類の環を与えることが知られている。すなわち、(イ)を満たす環のクラスを$C_{id}(R)$で表し、(ロ)を満たす環のクラスを$C_{gr}(R)$で表すとき、等式$C_{id}(R)=C_{gr}(R)$が成立する。しかし、Rが代数閉体ではないときは、一般にどちら向きの包含関係も成立しない。そこで、等式$C_{id}(R)=C_{gr}(R)$が成立するためのRに関する条件について調べてみた。これも以前からの研究の継続であるが、今回いくつかの結果を得ることができた。

研究手法として、$C_{id}(R)\supset C_{gr}(R)$が成り立つための条件と、$C_{id}(R)\subset C_{gr}(R)$が成り立つための条件を個別に検討し、両者を総合して等式が成り立つための条件を求めることにした。

以下、Rの可逆元全体のなす乗法群を$U(R)$で表し、Rの元として正則となるような正整数の集合を$\Gamma(R)$で表す。また、$\Phi_n(X)$はn位の円分多項式とする。

まず、$C_{id}(R)\supset C_{gr}(R)$が成り立つための条件を調べ、次の結果を得た。

定理 13　次の条件は互いに同値である。
(i)　$C_{id}(R)\supset C_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii)　$\Gamma(R)\subset U(R)$かつ$\Gamma(R)$の任意の元nに対して、$\Phi_n(X)$はRに根をもつ。

次いで、逆向きの包含関係$C_{id}(R)\subset C_{gr}(R)$が成立する条件について考察した結果、次の定理を証明した。

定理 14　次の条件は互いに同値である。
(i)　$C_{id}(R) \subset C_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) $R \times R$ は $C_{gr}(R)$に属する。

系 15　素数 p であって、U(R)に属し、$\Phi_p(X)$が R に根を持つようなものが存在するなら、$C_{id}(R) \subset C_{gr}(R)$が成り立つ。

以上 2 つの定理から、等式 $C_{id}(R)=C_{gr}(R)$が成立するための条件を与える次の定理を得ることができた。

定理 16　次の条件は互いに同値である。
(i)　$C_{id}(R)=C_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii)　$\phi \neq \Gamma(R)$かつ $C_{id}(R) \supset C_{gr}(R)$である。
(iii)　$\phi \neq \Gamma(R) \subset U(R)$かつ$\Gamma(R)$の任意の元 n に対して、$\Phi_n(X)$は R に根をもつ。
さらに、R が indecomposable ならば、上の条件は次にも同値である。
(iv)　$\phi \neq \Gamma(R) \subset U(R)$かつ$\Gamma(R)$の任意の元 n に対して、群 U(R)は位数 n の元をもつ。

以上の研究を発展させて、次に示す 2 種類の環の関係についても調べた。環 A に対して、A を零根基で割って得られる A_{red}を A の被約化とよぶ。

(ハ)　被約化が R 上べき等元で生成される環
(ニ)　R 上の捻れのない可換群 G による群環 RG の剰余環として得られる環

(ハ)、(ニ)を満たす環のクラスをそれぞれ、$D_{id}(R)$、$D_{gr}(R)$で表し、等式 $D_{id}(R)=D_{gr}(R)$が成立する条件について考察した。まず包含関係 $D_{id}(R) \supset D_{gr}(R)$が成立する条件を調べた結果次を得た。

定理 17　次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \supset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) 任意の有限巡回群 G について、群環 RG の被約化は R 上べき等元で生成される。

続いて、R の標数が正の場合と 0 の場合に分けて考察し、次の 2 つの定理を得た。ただし、$\mathbf{Z}$は整数環、$\mathbf{F}_p$は標数 p の素体を表す。

定理 18　R の標数が正のとき、次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \supset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) 任意の正整数 n について、$\Phi_n(X)$は R_{red}に根をもつ。

定理 19　R の標数が 0 のとき、次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \supset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) 任意の正整数 n について、$n = n^2c$ を満たす R_{red}の元 c が存在し、かつ$\Phi_n(X)$は R_{red}に根をもつ。
(iii) 任意の正整数 n について、$\Phi_n(X)$は R_{red}に根をもち、さらに、任意の素数 p について、次の(a)、(b)のいずれかが成り立つ。
(a) p は $U(R_{red})$に含まれる。
(b) $\mathbf{Z}[1/p] \times \mathbf{F}_p \subset R_{red}$が成り立つ。

次いで、逆の包含関係 $D_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成立するための条件について考察した。これに関しては、まず、次の 3 つの基礎的な結果を示した。

補題 20　$A=R[X]/(X^2)$とおくとき、A が $D_{gr}(R)$に含まれるための必要十分条件は R が正標数となることである。

補題 21　R が正標数のとき、次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) $C_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成り立つ。

補題 22　次の条件は互いに同値である。
(i)　$C_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) $R \times R$ は $D_{gr}(R)$に属する。
(iii) U(R)に有限位数の元 $c_1, ..., c_m$ が存在して $R(1-c_1, \cdots, 1-c_m)=R$ が成り立つ。

以上の 3 補題をまとめて、次の定理を得た。

定理 23　次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) R は正標数で、かつ $R \times R$ は $D_{gr}(R)$に属する。
(iii) R は正標数で、かつ U(R)に有限位数の元 $c_1, ..., c_m$ が存在して $R(1-c_1, \cdots, 1-c_m)=R$ が成り立つ。

定理 17 と定理 23 を総合して、次が得られた。

定理 24　次の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R)=D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) R は正標数で $D_{id}(R) \supset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(iii) R は正標数で、任意の正整数 n について$\Phi_n(X)$ は R_{red} に根をもつ。

この定理に関連して次の結果を示した。

定理 25　R は零次元半局所環とする。このとき、以下の条件は互いに同値である。
(i)　$D_{id}(R) \subset D_{gr}(R)$が成り立つ。
(ii) R は正標数で、かつ、R の各極大イデアル M について、次の(a)、(b)のいずれかが成り立つ。
(a) R/M の標数は 2 ではない。
(b) R/M の標数は 2 で、$\mathbf{F}_2$は R/M の中で代数的に閉じていない。
(iii) R は正標数であり、U(R)の中に位数有限の元 c で、1-c も U(R)に属するようなものが存在する。

この定理を応用して次の結果を導いたが、これは R が代数閉体の場合の直接的な一般化

になっている。

定理 26 R は零次元半局所環、A は R を含む可換環で、R-加群として有限生成とする。このとき、R が正標数かつ R の任意の極大イデアル M に対して R/M が代数的閉体なら、有限アーベル群 G が存在して、A は群環 RG の剰余環となる。

(4) 以上が今回の研究で得られた主要な結果である。十分な進展はみたが、究極の目標である $\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造決定については、まだ解明すべき点が多く残っている。これが今後の課題である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① S. M. Bhatwadekar, A. K. Dutta and N. Onoda, On algebras which are locally $\boldsymbol{A}^1$ in codimension-one, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 365, 4497-4537, 2013. 査読有

② H. Kawai and N. Onoda, Commutative rings over which algebras generated by idempotents are quotients of group algebras, J. Comm. Alg., Vol. 7, 373-391, 2015. 査読有

〔学会発表〕（計 2 件）

① N. Onoda, On finite generation of algebras over two-dimensional regular local rings, 第 11 回アフィン代数幾何学研究集会、2013 年 3 月 2 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス

② N. Onoda, Poincare series of the kernel of a locally nilpotent derivation on the polynomial ring, アフィン代数幾何学研究シンポジウム、2014 年 9 月 14 日、首都大学東京

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://apphy.u-fukui.ac.jp/mqs/math/onoda.html

６．研究組織
(1)研究代表者

小野田 信春（ONODA NOBUHARU）
福井大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：40169347

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：

(4)海外共同研究者

S. M. Bhatwadekar
Bhaskaracharya Pratishthana・教授
インド
A. K. Dutta
Indian Statistical Institute・教授
インド