

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：14302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540040

研究課題名(和文) サグビー変形とその不変式論への応用

研究課題名(英文) Sagbi deformation and its application to invariant theory

研究代表者

宮崎 充弘 (Miyazaki, Mitsuhiro)

京都教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90219767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：サグビー基底とは、近年きわめて多くの分野とのつながりが見出され、さかんに研究されているグレブナー基底の部分環版である。

本研究では、データ解析の分野等とのつながりにより、近年さかんに研究されている、高次元配列データ(テンソル)に対する群作用と、その不変式環のサグビー基底を調べ、いくつかの、不定元を成分とする3次元テンソルに関して、それに対する特殊線型群の作用が誘導する基礎体上の多項式環の作用に関する不変式環を、そのサグビー基底を求めることにより調べた。

研究成果の概要(英文)：Sagbi basis is an analogue of Groebner basis for ideals, which is very widely investigated by many researchers in these days.

In this research, we investigated the action of groups to high dimensional array of datum, which is called a tensor and is widely investigated by many researchers in relation to data analysis, and the ring of invariants with respect to this group action. And we have succeeded in some cases of 3-dimensional tensors, finding the sagbi basis of the ring of invariants and therefore the ring of invariants under the action of special linear groups.

研究分野：可換環論

キーワード：サグビー基底 不変式 高次元配列 テンソル グレブナー基底

1. 研究開始当初の背景

1変数の多項式環においては、高等学校でも扱われるように、割り算ができる。すなわち、商と剰余を求めるアルゴリズムが存在する。単項式全体の集合に、全順序を導入することにより、多変数の多項式環でも、剰余が定義され、それを求めるアルゴリズムが存在することを示したのが、グレブナー基底の理論である。この理論は、その創始者ブッフバーガーの予想をおそらく超えて発展し、極めて多方面とのつながりを持つことが見いだされ、現在さかんに研究されている。

グレブナー基底は、多項式環のイデアルに対して定義されるものだが、多項式環の部分環に対して定義される対応物が、サグビー基底である。体上の多項式環のイデアルはすべて有限生成であるのに対し、部分環は必ずしも有限生成であるとは限らない。従って、そのような部分環のサグビー基底はもちろん有限にはならないが、中には部分環自身は有限生成であるにもかかわらず、有限なサグビー基底が存在しないようなものもある。そのため、サグビー基底は取り扱いが難しく、グレブナー基底ほどには研究者の注目を集めてはいない。

しかしながら、多項式環に対する群作用の不変式環を考える際には、サグビー基底は有効な手段となる。初等的な例でいえば、対称式が基本対称式が多項式として表されることも、サグビー基底を用いると、見やすい証明が得られる。さらに、サグビー基底に関しても、グレブナー基底と同じように、平坦変形 (flat deformation) により、ホモロジカルな量が上半連続であることがわかっている。このような事実から、不変式環の研究には、サグビー基底を考察することが重要であると考えられた。

2. 研究の目的

体上の多項式環に対する群作用の不変式環など、可換環論的に重要な対象を、そのサグビー基底を中心として調べることにより、様々な群の作用に関する不変式環を調べ、またその性質や、不変量の中で可換環論的に重要である物を探る。

3. 研究の方法

体上の多項式環に対する、様々な群作用の不変式環と、そのサグビー基底を求め、それらが他の重要な概念とのつながりを持つかどうかを探り、それにより、作用と不変式環の性質、先頭項部分代数 (initial algebra) の性質など、様々な関係を調べていく。

4. 研究成果

私は、本研究の他に、九州大学の坂田先生、角先生と共同で、テンソルの階数に関する研

究を行っていた。テンソルとは、行列の高次元版で、高次元の直方体状にデータが並んだものである。近年テンソルは、そのデータ解析方面への応用の広さにより、さかんに研究されている。

私は、本研究の初期段階において、テンソルデータへの群作用と、その不変式を、本研究の主テーマであるサグビー基底の観点から調べると、どのような事がわかるだろうかという点に興味を持った。具体的には、不定元を成分とするテンソルに、群を作用させることにより、それらテンソルの成分であるところの不定元で生成された多項式環に群が作用することになるが、その不変式環を調べることが重要ではないかと思うに至った。そのためそれ以後、テンソルデータへの群作用とその不変式環をサグビー基底の観点から調べることに集中的に取り組んだ。

テンソルは高次元であるがゆえに、様々な方向からの群の作用が考えられる。それらの群の直積による作用を考えると、その不変式環は、各々の群の作用に関する不変式環の共通部分になる。多項式環の複数の部分環の、共通部分に含まれる多項式の先頭項として現れる単項式は、共通部分を構成するどの部分環に関しても、その部分環の先頭項部分代数 (initial algebra) に含まれている。従って、サグビー基底をうまく調べることにより、その共通部分の先頭項部分代数が求められ、それにより、共通部分のサグビー基底、そして調べたかった、複数の部分環の共通部分が求められることになる。

この手法により、いくつかの、不定元を成分とする、3次元テンソルに対する、特殊線型群の作用に関する不変式環を、そのサグビー基底まで含めて求める事に成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

1. 宮崎 充弘,

Tensor of indeterminates への群作用とその不変式環の initial algebra について、第 27 回可換環論セミナー報告集

103-107 (2015)

査読なし

2. Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,

Typical ranks of $m \times n \times (m-1)n$ tensors with $3 \leq m \leq n$ over the real number field. Linear Multilinear Algebra 63 (2015), no. 5, 940-955

DOI:10.1080/03081087.2014.910206

査読あり

3. Toshio Sumi, Toshio Sakata and Mitsuhiro Miyazaki,
Rank of n -tensors with size $2 \times \dots \times 2$,
Far East Journal of Mathematical Sciences,
90, 141-162 (2014)
査読あり
4. Mitsuyasu Hashimoto and Mitsuhiro Miyazaki,
 G -prime and G -primary G -ideals on G -schemes,
Communications in Algebra 41,
2254-2296 (2013)
DOI:10.1080/00927872.2012.656335
査読あり
5. 宮崎 充弘,
Classical invariants of binary forms について,
第 25 回可換環論セミナー報告集
30-44 (2013)
査読なし
6. Mitsuhiro Miyazaki,
The action of special linear groups to the tensor of indeterminates and the ring of invariants,
第 3 4 回可換環論シンポジウム報告集
222-229 (2013)
査読なし
7. Toshio Sumi, Toshio Sakata and Mitsuhiro Miyazaki,
Typical ranks for $m \times n \times (m-1)n$ tensors with $m \leq n$
Linear Algebra and its Application,
438, 953-958 (2013).
査読あり
8. 宮崎 充弘,
Orthogonal designs, absolutely full column rank tensors and typical ranks of 3-tensors,
第 24 回可換環論セミナー報告集
138-145 (2012)
査読なし
9. Mitsuhiro Miyazaki,
On the depth of an algebra with straightening law and its discrete counterpart,
The 7-th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra
303-307 (2012)
査読なし

[学会発表](計 9 件)

1. 宮崎充弘,

Actions of special linear groups to tensors of indeterminates and sagbi bases of the rings of invariants,
明治大学,
日本数学会年会,
2015 年 3 月 21 日

2. 宮崎充弘,
Tensor of indeterminates への群作用とその不変式環の initial algebra について,
第 27 回可換環論セミナー,
静岡大学,
2015 年 1 月 28 日

3. 宮崎充弘,
Group action on tensors of indeterminates and sagbi bases,
可換環論と表現論 吉野雄二先生還暦記念研究集会,
岡山大学,
2014 年 10 月 13 日
(招待講演)

4. Mitsuhiro Miyazaki,
Typical ranks of 3-tensors over the real number field and Hurwitz-Radon function,
Howard International House, Taipei, Taiwan
The 3rd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting
2014 年 6 月 30 日

5. Mitsuhiro Miyazaki,
Hurwitz-Radon function, absolutely nonsingular tensor and typical ranks of 3-tensors,
京都テルサ,
計算代数統計による統計と関連数学領域の革新
Innovation in statistics and related mathematics through computational algebraic statistics,
2014 年 1 月 23 日

6. 宮崎充弘,
Tensor of indeterminates and invariant theory,
京都大学,
日本数学会年会,
2013 年 3 月 22 日

7. 宮崎充弘,
Classical invariants of binary forms について,
第 25 回可換環論セミナー,
奈良県新公会堂(奈良市)
2013 年 1 月 30 日

8. 宮崎充弘,

The action of special linear groups to the tensor of indeterminates and the ring of invariants,

第 34 回可換環論シンポジウム,
IPC 生産性国際交流センター(神奈川県三浦郡葉山町湘南国際村),
2012 年 11 月 26 日

9. Mitsuhiro Miyazaki,
Absolutely full column rank tensors and typical ranks of tensors,
つくば国際会議場 エポカルつくば(茨城県つくば市竹園 2 丁目 20 番 3 号),
2012 年 7 月 3 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮崎 充弘 (MIYAZAKI, Mitsuhiro)
京都教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 90219767