2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００４１

研究課題名（和文）マッカイ対応と導来圏に関する研究

研究課題名（英文）Research on the McKay correspondence and derived categories

研究代表者
石井　亮（Ishii, Akira）

広島大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：１０２５２４２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：トーラス上のダイマー模型と呼ばれる２色グラフに付いて考察した．まず，両立的でないダイマー模型を特性多角形を変化させ ずに両立的にできることを示した．ダイマー模型へ有限群作用が与えられたとき，対応するトーリック多様体にも標準束への作用が自明になるような形で同じ群が作用することを示した．３次元アフィントーリック多様体とそこへの有限群作用（前述の条件を満たす）が与えられたとき，それらに対応する群作用つきダイマー模型が構成できるかどうかという問題を考察し，多くの場合に肯定的な結果を得た．

研究成果の概要（英文）：We considered problems on dimer models, which are certain bipartite graphs on the 2-torus. We first proved that a non-degenerate dimer model can be made consistent without changing its characteristic polygon. For a dimer model with a finite group action, we defineded a natural action of the same group on the associated 3-dimensional toric variety in such a way that the action on the canonical sheaf is trivial. Given a Gorenstein affine toric 3-fold with a gout action, we considered the problem whether there exists an consistent dimer model with a group action corresponding to it. In many cases, we obtained an affirmative answer.

研究分野：代数幾何学

キーワード：マッカイ対応　ダイマー模型　クレパント解消　非可換クレパント解消

1. 研究開始当初の背景

SL$(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対し，商特異点 $X=\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消の様子は A,D,E 型の Dynkin 図形で記述されることはよく知られている．本来マッカイ対応というのは，G の非自明既約表現と Dynkin 図形の頂点，すなわち既約例外曲線との間の対応を言う．マッカイ対応は特異点解消の幾何学と G の表現論の間の対応として深く研究され，今では最小特異点解消 Y の連接層の導来圏と $\mathbb{C}^2$ 上の G-同変な連接層の導来圏の間の圏同値として確立されている：

$$D^b(\operatorname{Coh} Y) \cong D^b(\operatorname{Coh}^G(\mathbb{C}^2)).$$

この右辺に出てくる，G-同変な連接層のアーベル圏 $\operatorname{Coh}^G(\mathbb{C}^2)$ は，G の McKay quiver と呼ばれる関係式付 quiver の有限生成表現の圏と圏同値であり，この quiver の道代数は商特異点の (自明な)「非可換クレパント解消」と呼ばれるものになっている．以上のようなことは，Bridgeland, King, Reid により SL$(3,\mathbb{C})$ の有限部分群に対して拡張されている．

我々は，ダイマー模型と呼ばれるものを使うことによって，SL$(3,\mathbb{C})$ の有限可換部分群による商特異点に対する上記結果を，3 次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体に拡張できることをこれまでに示して来ていた [a]. また，この結果を用いて，二次元トーリックファノスタック上に充満強例外列を構成することが出来ていた．本研究では，ダイマー模型に関する研究をさらに一般化するためのものである．

[a] Akira Ishii and Kazushi Ueda, Dimer models and the special McKay correspondence, arXiv:0905.0059v1.

[b] Akira Ishii and Kazushi Ueda, Dimer models and exceptional collections, arXiv:0911.4529.

2. 研究の目的

有限群による対称性を持ったダイマー模型を考えることにより，３次元トーリックゴレンシュタイン特異点（以下単にトーリック特異点と呼ぶ）の有限群による商の非可換クレパント解消を構成することを目論む．2 次元の商特異点の場合で言えば，上記ダイマー模型の話は A 型に対応する話であって，ここで考えるのは D 型の特異点に対応するような，トーリックではない特異点である．

有限群がダイマー模型に作用しているとき，それは付随する quiver, その道代数および表現のモジュライ空間にも作用する．(ただし，群の作用が 2 次元トーラスの向きを保たないときの作用のさせ方には注意が必要である．) この状況で，新しい関係式付き quiver を構成し，その道代数が特異点の非可換クレパント解消になっているようにしたい．例えば SL$(3,\mathbb{C})$ に部分群として含まれる二項多面体群 G を考えると，G は指数 2 の巡回部分群 (A とする) を含むので，商特異点 $\mathbb{C}^3/G$ は巡回商特異点 $\mathbb{C}^3/A$ を対合で割ったものになっている．この状況で A に対する McKay quiver には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が作用しているが，G の McKay quiver を A の McKay quiver への $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用を使って記述する，ということが A.Nolla 氏によってなされている．そこで，本研究では Nolla 氏と協力しながら

- 有限群のダイマー模型への作用を定義し，それを固定した時に，標準直線束を自明にするようなトーリック特異点へのその群の作用のさせ方を分類せよ．
- トーリック特異点の非可換クレパント解消への群作用を定義し，その商としてトーッリック特異点の商の非可換クレパント解消を構成せよ．
- 上記非可換クレパント解消を記述する関係式つき quiver を決定せよ．
- 有限群の作用する 3 次元トーリック特異点が与えられたとき，それに対応する群作用付きダイマー模型を構成せよ．

といった問題の解決を目指す．

3. 研究の方法

本研究計画では, 海外研究者の招聘や申請者自身の国内出張により, 情報収集および研究打ち合わせを行った．実施内容を, 年度別に述べると次のようになる：

2012 年度　当該分野の現状と問題点を明確にするために申請者自身が国内・海外出張を行い, 情報収集および打ち合わせを行った．

2013 年度　現状分析および更なる展望のために海外研究者を招いて研究打ち合わせおよび国内発表を行った．

2014 年度　研究の細部の詰めの為に海外出張. 最終的な取り纏めと発表.

4. 研究成果

(1) 主な成果

トーラス上のダイマー模型は両立性と呼ばれる条件を満たすとき，３次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体の可換／非可換クレパント解消を定めるなど，よい性質を持っていることがわかっている．任意の凸格子多角形に対して，それを特性多角形とする両立的ダイマー模型が存在することがわかっている．これらについて，次のような成果を得

た．
① 両立的ダイマー模型は，非退化という性質を持つが，非退化だからといって両立的とは限らない．そこで，非退化なダイマー模型が与えられたとき，その特性多角形を保ったまま両立的にできるか，という問題を考察した．Beil 氏および植田氏との共同研究において，非退化なダイマー模型からいくつかの辺をうまく取り去ることによって，特性多角形を変えずにダイマー模型を両立的にできる，ということを証明し，プレプリントとして発表した．非退化ダイマー模型は作りやすい一方，両立性というのは強い条件であり，この研究により両立的ダイマー模型の例が容易に作れることが期待される．また，両立的なダイマー模型の定める箙の道代数は，ネター的かつカラビ・ヤウ的であるという良い性質を持っているが，両立生を仮定しないとネター的とはかぎらない．本研究によって，両立的でないダイマー模型の道代数を両立的なダイマー模型の道代数と比べることができ，その性質を調べることができるものと期待している．
② 群作用を持つダイマー模型については，３次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体への付随する作用について考察した．まず問題となるのは，与えられた格子凸多角形と，それに対する有限群作用があったとき，それらに対応する両立的ダイマー模型が構成できるか，ということである．位数２，３，４の回転の生成する群の場合，大きな正方形又は正三角形に埋め込み，一つの群軌道上にある頂点を同時に取り除くという操作を繰り返すことにより，両立的ダイマー模型を構成することができた．
③ 一方，多角形への作用が位数２の群による裏返し作用の場合，多様体への作用のさせ方は必ずしも多角形への作用から決まらないこと，作用を指定するためにどのようなデータを考えればよいかがわかった．その場合も含め，二面体群の場合には前述の「一つの群軌道上にある頂点を同時に取り除く」という操作が有効でないことがわかった．そこで，両立的ダイマー模型を構成する新たな方法を考案した．この方法を採用することにより，二面体群のうち２つの場合を除いて，両立的ダイマー模型を構成することができた．

(2) 成果の国内外での位置付けとインパクト

両立的でないダイマー模型を特性多角形を変化させずに両立的にできる，という結果は両立的でないダイマー模型の道代数の研究に道を開くものである．また，商特異点でもトーリックでもないゴレンシュタイン特異点に対して，非可換クレパント解消を組織的に構成したのはこれまでに例のないことであろう．それのみならず，ダイマー模型の構成法として，新たに直接的なものを見いだすことが出来たことは有意義であると思われる．

(3) 今後の展望

まずは，すべての群作用つき格子凸多角形に対して，対応する両立的ダイマー模型を構成できるかどうかが問題になる．通常のダイマー模型が ”A 型” に相当するとすると，これらは ”D 型” に相当する話だと思われるので，より一般の場合というのがどういうものであるか，考察すべきであろう．また，群作用つきダイマー模型を考えるとき，対応する箙にも同じ群が作用しており，箙への群作用の商についての考察も面白い問題を含むことと思われる．

5. 主な発表論文等
〔雑誌論文〕(16 件)

[1] “The special McKay correspondence and exceptional collections”, A. Ishii, Kazushi Ueda, Tohoku Math. J.（掲載決定）(査読あり).

[2] “Dimer models and crepant resolutions”, A. Ishii, Kazushi Ueda, Hokkaido Math. J.（掲載決定）(査読あり).

[3] Hoang, Thanh Hoai, Shimada, Ichiro, On Ballico-Hefez curves and associated supersingular surfaces. Kodai Math. J. 38 (2015), no. 1, 23–36. (査読あり)

[4] Shimada, Ichiro, Zhang, De-Qi, Dynkin diagrams of rank 20 on supersingular K3 surfaces. Sci. China Math. 58 (2015), no. 3, 543–552.(査読あり)

[5] Kimura, Shunichi, Kuroda, Shigeru ; Takahashi, Nobuyoshi . The closed cone of a rational series is rational polyhedral. J. Algebra 405 (2014), 243–258.(査読あり)

[6] Kondo, Shigeyuki, Shimada, Ichiro, On a certain duality of Nron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces. Algebr. Geom. 1 (2014), no. 3, 311–333.(査読あり)

[7] Shimada, Ichiro, The graphs of Hoffman-Singleton, Higman-Sims and McLaughlin, and the Hermitian curve of degree 6 in characteristic 5. Australas. J. Combin. 59 (2014), 161–181.(査読あり)

[8] Katsura, Toshiyuki, Kondo, Shigeyuki, Shimada, Ichiro, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1. Michigan Math. J. 63 (2014), no. 4, 803–844.(査読あり)

[9] Kondo, Shigeyuki, Shimada, Ichiro, The automorphism group of a supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3. Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, no. 7, 1885–1924.(査読あり)

[10] Shimada, Ichiro, Projective models of the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 5. J. Algebra 403 (2014), 273–299.(査読あり)

[11] "On G/N-Hilb of N-Hilb", A. Ishii, Y. Ito, A. Nolla, Kyoto J. Math., **53**, 91–130, (2013) (査読あり).

[12] Shimada, Ichiro, A note on rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety. Des. Codes Cryptogr. 69 (2013), no. 3, 299–303.(査読あり)

[13] "A note on derived categories of Fermat varieties" A. Ishii, K. Ueda, Derived Categories in Algebraic Geometry Tokyo 2011 (EMS Series of Congress Reports), (2013), 103–110, (査読あり).

[14] Kimura, Kenichiro, Kimura, Shun-Ichi, Takahashi, Nobuyoshi . Motivic zeta functions in additive monoidal categories. J. K-Theory 9 (2012), no. 3, 459–473.(査読あり)

[15] Elizondo, E. Javier, Kimura, Shun-ichi, Rationality of motivic Chow series modulo A1-homotopy. Adv. Math. 230 (2012), no. 3, 876–893.(査読あり)

[16] Shimada, Ichiro, On Frobenius incidence varieties of linear subspaces over finite fields. Finite Fields Appl. 18 (2012), no. 2, 337–361.(査読あり)

〔学会発表〕(7 件)

1. "Dimer models and group actions" A. Ishii, McKay correspondence, orbifolds, quivers, Warwick Universeity, U.K.（招待講演）, 2014 年 9 月 16 日

2. "Dimer models and group actions" A. Ishii, Bridgeland stability and Birational geometries, 京都大学数理解析研究所（招待講演）, 2014 年 6 月 18 日

3. "Dimer models and non-commutative crepant resolutions", A. Ishii, 代数幾何学城崎シンポジウム, 兵庫県立城崎大会議館（招待講演）, 2013 年 10 月 23 日

4. "Dimer models and non-commutative crepant resolutions", A. Ishii, Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics, 京都大学数理解析研究所（招待講演）, 2013 年 7 月 2 日,

5. "Dimer models and crepant resolutions", A. Ishii, Singularities, 2012 年 9 月 25 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany（招待講演）

6. "A remark on derived categories of Fermat varieties", A. Ishii, 高次元代数幾何の周辺, 2012 年 6 月 13 日, 京都大学数理解析研究所（招待講演）

7. "Dimer models and crepant resolutions", A. Ishii, Conference on Resolution of Singularities and the McKay Correspondence, 2012 年 5 月 1 日, 名古屋大学（招待講演）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 亮 (Akira Ishii)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10252420

(2) 研究分担者

島田 伊知朗 (Ichiro Shimada)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10235616

木村 俊一 (Shun-ichi Kimura)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10284150

隅広 秀康 (Hideyasu Sumihiro)
広島大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60068129