1版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１６４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2012～2015

課題番号：２４５４００４３

研究課題名（和文）偏極多様体の多重随伴束の大域切断のなす次元についての研究

研究課題名（英文）A study on the dimension of global sections of multiple adjoint bundle of polarized manifolds

研究代表者

福間　慶明（Fukuma, Yoshiaki）

高知大学・自然科学系理学部門・教授

研究者番号：２０３０１３１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において随伴束K+Lがnefとなる任意のn次元準偏極多様体(X,L)に対して随伴束のm階テンソルm(K+L)の大域切断のなす次元が正となるmの値の最小値m(n)を調べ，2n-4以下になることを示した(ただしKはXの標準因子とする)．また4次元の偏極多様体に対してBeltrametti-Sommese予想を示すことに成功した．さらに偏極多様体の不変量である断面種数や断面classに関する研究も行い，今までに知られていなかった成果を得ることができた．

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied the minimal value m(n) which satisfies the following property: the dimension of global section of m(K+L) is positive for any n-dimensional quasi-polarized manifolds (X,L) and every integer m which is greater than or equal to m(n), where K denotes the canonical divisor of X. Then we proved that m(n) is less than or equal to 2n-4. Moreover for the case of 4-dimensional polarized manifolds, we proved a conjecture which was proposed by Beltrametti and Sommese. Furthermore I studied the sectional genus and the sectional class, which are invariants of polarized manifolds, and I got several results which have been unknown.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数学　偏極多様体　準偏極多様体　豊富な因子　nefかつbigな因子　随伴束　断面不変量

１．研究開始当初の背景

X を複素数体上定義された n 次元非特異射影多様体，L を X 上の豊富な因子(もしくは nef かつ big な因子)とする．この時これらの組(X,L)を偏極多様体(もしくは準偏極多様体)と呼ぶ．1980 年代後半から Beltrametti, Fujita, Ionescu, Lanteri, Palleschi, Sommese らによる貢献により，偏極多様体の随伴束に関する理論の研究が著しく進展し，それにより偏極多様体に関する色々な性質を詳しく考察することが可能となった．そのような中で 1990年にIonescuにより｢随伴束 K+L が nef の時，K+L の大域切断のなす次元が正となる」ことが予想された．またこの予想より弱い予想であるが，Beltrametti と Sommese により「n 次元偏極多様体の随伴束 K+(n-1)L が nef ならば，K+(n-1)L の大域切断のなす次元が正となる」ことが予想された．このBeltrametti とSommeseにより提出された予想はIonescuの予想よりは弱い予想であるが，とても難しい未解決問題として研究されてきた．2 次元以下の場合には，正しいことは比較的容易に証明され，3 次元以上については未解決であったが, 2006 年に本研究代表者により 3 次元の場合に証明された．この結果がきっかけとなり，随伴束の大域切断に関する次元の研究が進展し始めた．そのような中，2012 年 Horing により 3 次元の場合の Ionescu 予想が証明された．そこで以上のような研究結果をさらに進展させるべく今回の研究課題を提案した．

２．研究の目的

本研究の主目的は随伴束 K+L が nef（もしくは随伴束の飯高次元が非負)となる任意の偏極多様体に対して随伴束の m 階テンソル m(K+L)の大域切断のなす次元が正となる m の値の最小値（随伴束が nef のときはこの値を m(n)とおき、随伴束の飯高次元が非負のときはこの値を p(n)とおく）を調べることである（ただし K は X の標準因子）．本研究を行う手段として，偏極多様体の不変量を用いた立場からの研究を主に行う．そのため偏極多様体の不変量に関する研究を行う必要もあるので，それについても詳しく調べる．

３．研究の方法

研究手法については，本研究代表者がそれまでに行ってきた偏極多様体の不変量を用いたものである．偏極多様体の不変量を用いた研究のメリットは，随伴束の大域切断のなす次元の値による偏極多様体の分類などのより詳しい解析が可能になる点である．特に必要な不変量は 0 以上 n 以下の整数 i に対して定義される第 i 断面幾何種数と呼ばれるものである．第 i 断面幾何種数は i 次元非特異多様体の幾何種数と類似の性質を持つと期待される．ここで，i の値が 0 の時は(X,L)の次数 L^n であり，i の値が 1 の時は(X,L)の断面種数となる．

４．研究成果

今回の研究期間内に以下のことについて研究成果を得ることができた．

(1) n 次元準偏極多様体に対して m(n)の上限を求めることに成功した．まず m(n)は n+2 の 2 乗を 8 で割ったものの切り上げで上から抑えられることを示した．この結果は今まで知られていた荒川氏の上限の値を改良したものとなっている．さらに荒川氏が偏極多様体を扱っているのに対し、今回の研究成果はより一般に準偏極多様体の場合に証明した．証明方法についても荒川氏のものとは異なる方法である．またさらに研究を進めることでこの値を改良することに成功し，2n-4 で上から抑えることができることを示すことができた．これにより第一段階で予想していた値を導くことができたことになる．

(2) 偏極多様体の断面不変量による分類についてもいくつかの成果を得ることができた．以下でそれを記す．

① 多重随伴束の大域切断の次元を求める際に必要となる多重準偏極多様体の不変量の研究の一つとして，多重準偏極多様体の断面種数の非負性について研究し，その証明を与えた．また 3 次元非特異射影多様体に対して多重準偏極多様体の断面種数の値が 0 となる場合の分類を与えた．

② 断面種数に関しては大域切断の次元が 2 であるような豊富な因子をもつ 3 次元非特異射影多様体でその断面種数が不正則数と等しくなるような 3 次元偏極多様体の分類に成功した．これにより 1990 年代後半に得られた研究成果の進展が得られたことになる．

③ n 次元偏極多様体(X,L)のうち L の完備線形系が基点を持たず，さらに g(X,L)=q(X)+m かつ h^0 (L)=n+m−1 を満たすような(X,L)の分類を行った．この研究は研究代表者が以前から行っていた断面種数と不正則数との関係に関連したものであり，今後の研究の応用に役立つことが期待される結果である．

④ n 次元偏極多様体(X,L)が与えられた時に 0 以上 n 以下の整数 i に対して定義される第 i 断面 Betti 数 b_i(X,L)なる不変量がある．その中でも今回の研究では

第2断面Betti数$b_2(X,L)$について考察した．Lが非常に豊富な因子の場合には第2断面Betti数は第2 Betti数$b^2(X)$以上になることが示されており，$b_2(X,L)$- $b^2(X)$が 1 以下となる場合の(X,L)の分類はすでに知られているので今回の研究では$b_2(X,L)$- $b^2(X)=2$となる(X,L)の分類を行った．

(3) 4 次元の偏極多様体(X,L)に対して Beltrametti-Sommese 予想を証明することに成功した．つまり4次元の偏極多様体(X,L)に対してK+3Lがnefの時，K+3Lの大域切断の次元は正となることを示した．またこの結果は、随伴束の理論を用いることで、4次元偏極多様体でK+3Lの大域切断の次元が0であるものを分類することと同値であることがわかる．そこでこの視点から4次元偏極多様体でK+3Lの大域切断の次元が1であるものについて調べ，その分類を完成することができた．

(4) n次元偏極多様体(X,L)でLが非常に豊富な場合(X,L)のclassという不変量が定義される．これはXをLによる埋め込みにより射影空間の部分多様体と見たときのX の双対多様体が超曲面となった時はその次数、もし超曲面にならなかった時は0と定義したものである.Xの次元が2の時に，Lanteri 氏はある条件のもとで(X,L)のクラスが$d(X,L)+2g(X,L)+1$以上になることを証明した．ここで$d(X,L)$はLの次数，$g(X,L)$は(X,L)の断面種数を表す．今回の研究においてこの結果を改良することができた．つまり Lanteri 氏と同じ条件のもと，(X,L)のクラスが$d(X,L)+2g(X,L)+2$以上になることを証明した．さらに等号が成り立つような(X,L)の分類にも成功した．
また、一般の n 次元偏極多様体が与えられた時，0以上n以下の任意の整数iに対して第 i 断面 class と呼ばれる不変量が定義される．(X,L)が3次元偏極多様体の時の第2断面classの値について考察し，非負性や第 2 断面 class の値による分類などを行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計9件）

① Yoshiaki Fukuma, “On polarized 3-folds (X,L) such that $h^0(L)=2$ and the sectional genus of (X,L) is equal to the irregularity of X”, Communications in Algebra，査読有，44 (2016)，1728-1739.

② Yoshiaki Fukuma，“A note on a result of Lanteri about the class of a polarized surface”， Hiroshima Mathematical Journal，査読有，46 (2016)，79-85.

③ Yoshiaki Fukuma，“On polarized 4-folds (X,L) with $h^0(K_X+3L)=1$”，Journal of Pure and Applied Algebra，査読有，220 (2016)，1178-1187.

④ Yoshiaki Fukuma，“Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for quasi-polarized n -folds，II”，Journal of Algebra and its Applications，査読有， 15 (2016)，1650003，9 pp.

⑤ Yoshiaki Fukuma，“On a conjecture of Beltrametti-Sommese for polarized 4-folds”，Kodai Mathematical Journal，査読有，38 (2015)，343-351.

⑥ Yoshiaki Fukuma，“On sectional genus of multi-quasi-polarized manifolds”，Kyushu Journal of Mathematics，査読有，69 (2015)，49-62.

⑦ Yoshiaki Fukuma，“Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for quasi-polarized n -folds”，Journal of Algebra and its Applications，査読有， 13 (2014)，1450046，24 pp.

⑧ Yoshiaki Fukuma，“On complex n -folds polarized by an ample line bundle L with $Bs|L|=\emptyset$, $g(X,L)=q(X)+m$ and $h^0(L)=n+m-1$”，Kodai Mathematical Journal，査読有，37 (2014)，34-58.

⑨ Yoshiaki Fukuma，“Classification of polarized manifolds by the second sectional Betti number，II”，Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste，査読有，45 (2013)，47-66.

〔学会発表〕（計4件）

① 福間慶明 “On polarized 4-folds (X,L) with $h^0(K_X+3L)\leq 1$”日本数学会年会，2016年3月17日，筑波大学(茨城県・つくば市)

② 福間慶明 「準偏極多様体の不変量による随伴束の大域切断の次元についての考察」日本数学会春季総合分科会代数学分科会特別講演，2013年9月27日，愛媛大学(愛媛県・松山市)

③ 福間慶明 “Effective non-vanishing of

global sections of multiple adjoint bundles for quasi-polarized n-folds”日本数学会年会，2013 年 3 月 20 日，京都大学(京都府・京都市)

④ 福間慶明「偏極多様体の断面種数による分類について」津山代数幾何シンポジウム 2012，2012 年 7 月 31 日，津山工業高等専門学校(岡山県・津山市)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
福間　慶明（FUKUMA，Yoshiaki）
高知大学自然科学系理学部門・教授
研究者番号：20301319

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし