様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 5 月 15 日現在

機関番号：３２６７５
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００５３

研究課題名（和文）カラビ・ヤウ多様体をめぐる算術と幾何

研究課題名（英文）Arithmetic and Geometry over Calabi-Yau Varieties

研究代表者
桂　利行（KATSURA, Toshiyuki）

法政大学・理工学部・教授

研究者番号：４０１０８４４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：カラビ・ヤウ多様体は素粒子論にも現れる重要な多様体である。本研究では、２次元のカラビ・ヤウ多様体であるK3曲面を中心に、正標数という1を素数p回加えると0になるいわばデジタルの世界で、その幾何学的な構造を調べた。とくに、標数5における超特殊K3曲面には、96本の特異点のない有理曲線が存在し、それが互いに交わらない16本ずつの有理曲線の組にわかれ、その６組から任意の２組をとると美しい幾何学的な交わり方をしている。その他、アーベル曲面のチャーン写像の構造、幾何学的不変量の性質、３次元射影空間におけるある次数のフェルマー型超曲面の直線の構造などに関するいくつかの結果を得て、研究論文として発表した。

研究成果の概要（英文）：Calabi-Yau varieties are very important varieties both in mathematics and in physics (theory of elementary particles). In this research, I examined the structure of Calabi-Yau varieties, in particular, K3 surfaces (two-dimensional Calabi-Yau varieties) in characteristic p >0. In fact, on the superspecial K3 surface in characteristic 5, there exist 96 smooth rational curves, and they are divided into 6 groups. Any two curves in the same group don't intersect each other, and if we choose two groups among six, the curves in the two groups make a beautiful configuration. I had also obtain several results on the structure of Chern class maps of abelian surfaces, geometric invariants of algebraic varieties in positive characteristic, and the structure of lines on a certain Fermat hypersurface in the 3-dimensional projective space. I announced in total 4 papers on these results.

研究分野：代数幾何学

キーワード：カラビ・ヤウ多様体　K3曲面　アーベル曲面　正標数　有理曲線　楕円曲線　ネロン・セヴェリ群　直線配置

１．研究開始当初の背景

カラビ・ヤウ多様体は, 代数幾何学, 数論, 素粒子物理学（スーパーストリング理論）などに現れる重要な多様体である．とくに, 代数多様体の分類理論では, 小平次元０の代数多様体の一角を占め, スーパーストリング理論では, この世界の微細構造として注目されている．しかし, この多様体は未知の部分がいまだに多く, たとえば３次元以上の時は標数が０の場合でも, どのような位相構造が存在するかさえわかっておらず, 正標数の場合にはさらに多くの謎に包まれている．２次元の時には, 標数０の場合, 位相構造は知られており, それらが３次元射影空間の非特異４次曲面の変形として得られ, 従ってその曲面と同相であるという小平邦彦の結果があるが, 正標数においては, 代数的サイクルの量を表すピカール数が 22 になる超特異 K3 曲面の存在など（標数０の場合はピカール数の最大値は 20）, 神秘的な現象が数多く残されており, 詳しい研究が待たれる状況にあった．

２．研究の目的

カラビ・ヤウ多様体の代数幾何的, 数論的側面を研究する．とくに, 正標数において, カラビ・ヤウ多様体のモジュライ空間の構造, 代数的サイクルの構造, 微分形式や不変量の性質, 狭義のカラビ・ヤウ多様体の標数０への持ち上げ問題を調べる．正標数の K3 曲面（２次元カラビ・ヤウ多様体）の代数的サイクルの構造, とくに非特異有理曲線の配置の問題とピカール格子（ネロン・セヴェリ格子）の構造などを調べることが当面の目的となる．また, 正標数のＫ３曲面に対する Artin 予想の解明も本研究の目的の１つになっていたが, この予想は 2013 年に, Maulik, Charles, Pera によって解決された．

３．研究の方法

正標数の K3 曲面の研究では, 格子理論的な側面を金銅教授に, 正標数の代数多様体の側面を島田教授に担当していただき, 申請者は総括的に研究を遂行する．モジュライと正標数の不変量の研究には海外研究協力者を G. van der Geer に依頼して協力していただく．連携研究者・海外研究協力者とは, 基本的に e-mail によって連絡を取り共同研究を進めるが, 要所では招聘, ないしは申請者が出張することにより直接討論し, 細部を検討して研究を完成させる．研究に必要な代数関係の書籍・論文を収集し, コンピューター環境を整備する．また, 研究集会, 国際会議等に出席し, 成果を発表するとともに, 研究に必要な代数幾何学に関する情報を収集する．代数的サイクルの構造分析として, 標数５のＫ３曲面上の非特異有理曲線の配置を調べるところから研究を始める．

４．研究成果

(1)（連携研究者金銅誠之, 島田伊知朗との共同研究）正標数の K3 曲面（２次元カラビ・ヤウ多様体）の代数的サイクルの構造を調べる一環として, 標数５の超特殊 K3 曲面 X の上の非特異有理曲線のなす configuration を研究した．互いに交わらない n 本の非特異有理曲線のなす２つの集合 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ があり, $\mathcal{A}$ から曲線を１本選ぶとその曲線は $\mathcal{B}$ の m 本の曲線と交わり, $\mathcal{B}$ から曲線を１本選ぶとその曲線は $\mathcal{A}$ の m 本の曲線と交わるとする．このような直線の配置を n_m-configuration という．アーベル曲面から作ったクンマー K3 曲面上に存在する 16_6-configuration は古くからよく知られている．この研究では, 標数５の超特殊 K3 曲面 X 上に 96 本の有理曲線が存在し, それらが互いに交わらない 16 本の曲線からなる６つの組 S_{ij} $(i = 0,1; j = 0,1,2)$ にわかれ, その中から $S_{i,j}$, $S_{i,j'}$ という２組を選べば 16_6-configuration, $S_{i,j}$, $S_{i',j'}$ という２組を選べば 16_4-configuration, $S_{i,j}$, $S_{i',j}$ という２組を選べば 16_{12}-configuration をなすという対称性があることをことを示した．とくに, 16_{12}-configuration の存在はこれまで知られていない現象であると思われる．さらに, 有限体 $\mathbf{F}_{25}$ 上定義された K3 曲面 X のモデルが存在し, 96 本の有理曲線とそれらの交点がすべて $\mathbf{F}_{25}$ 上定義できる．構成した 96 本の有理曲線は, 格子理論と関係している．Conway が述べているように, ランク 26 の even unimodular lattice L で符号が $(1, 25)$ であるものは, ただ一つ存在し, ハイパボリック格子とリーチ格子の直和に同形になる．まず, X のネロン・セヴェリ格子 $NS(X)$ は L に primitive に埋め込めることを我々は証明した．格子 L, $NS(X)$ のそれぞれの係数を有理数体に拡張したものを $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, $NS(X)_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ とするとき, それらには Weyl 群が作用する．それらの positive cone に作用する Weyl 群の基本領域は chamber と呼ばれ, とくに $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の positive cone の chamber はリーチルートと呼ばれるベクトルによって記述できることが Conway によって示されている（引用文献①参照）．また, 自己交点数が正ですべての曲線との交点数が非負になるような因子全体は $NS(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の中で１つの chamber NE を生成することが Rudakov と Shafarevich に

よって示されている (引用文献②参照). $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の positive cone の chamber を $NS(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ に射影したものを induced chamber というが, 我々が構成した 96 本の非特異有理曲線は, NE の中の 1 つの induced chamber の wall を作るリーチルートと対応する. この他にも, NE の中に 252 本のリーチルートが wall と対応する induce chamber や 168 本のリーチルートが wall と対応する induced chamber が見つかった. また, 252 本のリーチルートについては, 幾何学的には, 超特殊 K3 曲面 X を射影平面の 6 次の Fermat 曲線で分岐する 2 枚の被覆として捉え, Fermat 曲線上にある 126 個の $\mathbf{F}_{25}$ 有理点での接線 126 本を X 上に引き戻すことによって得られる 252 本の非特異有理曲線として実現できる.

(2) アーベル多様体は広い意味のカラビ・ヤウ多様体である. この研究では, 2 次元のアーベル曲面の代数的サイクルの構造を調べ, その Chern class map の性質を解明した. まず, 超特殊アーベル曲面 A のネロン・セヴェリ群 $NS(A)$ の元を多元環の元として捉え, 交点理論を具体的に整備した. このことから, $NS(A)$ の基底が計算に都合の良い形をしていることを示した. それを用いて, $NS(A)/pNS(A)$ から A の正則 1-形式のなす層を係数とする第 1 コホモロジー 群 $H^1(A, \Omega^1_A)$ への Chern class map が単射であるための必要十分条件が A が超特殊ではないことであるという定理の直接証明を与えた. また, A が超特殊である場合の Chern class map の核が有限体 $\mathbf{F}_p$ 上 2 次元であることを具体的に示すとともに, 核の基底を A 上の因子を用いて具体的に与えた.

(3) p を素数, q を p のベキ p^a とするとき, 標数 p の体上の次数 $q+1$ の Fermat 曲面に存在する直線を含む超曲面が作る Lefschetz pencils の構造を調べた. そのために, この Fermat 多様体の上に存在する $\mathbf{F}_q$ 上および $\mathbf{F}_{q^2}$ 上それぞれに, 定義される有理点と直線の構造を具体的に調べた. 点と直線のそれぞれの数については既に知られていたが, それらがなす configuration を具体的に導きだすための 1 つの具体的な計算法を示し, 点と直線が $\mathbf{F}_{q^2}$ 上は $((q^3+1)(q^2+1)_{q+1}, (q^3+1)(q+1)_{q^2+1})$-configuration をなし, $\mathbf{F}_q$ 上は $(q^3+q^2+q+1)_{q+1}$-symmetric configuration をなすことを示した. また, その結果を用いて, 上記の Lefschetz pencils の構造を調べ, それらがすべて同形であることを証明し, それぞれの fiber space の sections のなす群が $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の $4a$ 個の直和に同形であることを示した。また, この pencil の構造を用いてこの Fermat 曲面が単有理的であるという既知の事実の幾何学的別証明を与えた. とくに, $q = 3$ の場合はこの Fermat 曲面は超特殊 K3 曲面になっている.

(4)(海外共同研究者 G. van der Geer との共同研究) 標数 $p > 0$ の代数多様体に対する不変量である a-数, b-数, h-数を定義し, それらの間の関係を調べた. a-数はランク p の local-local 群スキームと関係し, b-数は微分形式のコホモロジー群の次元と関係し, h-数は Artin-Mazur 形式群（形式的 Brauer 群）の高さと関係する. これらはいずれも正標数の代数多様体に特有の幾何学的不変量である. これらの不変量は, モジュライ空間の中のサイクルを調べるためにも用いられる. 本研究プロジェクトで行った部分は, 証明の改良と, X を n 次元の非特異完備代数多様体とするとき, b-数が有限なら, b-数は, 正則 1-形式の層を係数とする $n-1$ 次のコホモロジー群の次元以下であるという定理の例を示したことである. L. Illusie が我々の条件より強い条件のもとで同様の定理を示しているが, 彼の条件ではこの例の事実の証明に応用できない. 系として, 3 次元以上の rigid なカラビ・ヤウ多様体の h-数は 0 か無限大のいずれかであることが示せる.

＜引用文献＞

① J.H.Conway, The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice, J. Algebra 80 (1983), pp159-163.

② A.N.Rudakov and I.R.Shafarevich, Surfaces of type K3 over fields of finite characteristic, J. Soviet Math.22 (1983), pp1476-1533.

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文（研究論文）〕（計 4 件）

① T.Katsura, Lefschetz pencils on a certain hypersurface in positive characteristic, accepted in Advanced Studies in Pure Math., arXiv:1211.0138, 査読有.

② T.Katsura, The Chern class map on abelian surfaces, J. Algebra, 査読有, 425 (2015), pp85—106, dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.10.052.

③ T.Katsura, S.Kondo and I.Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, Michigan Math. J., 査読有, 63 (2014), pp803—844, doi:10.1307/mmj/1417799227.

④ G. van der Geer and T.Katsura, Relations

between some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, Rend. Circ. Mat. Palermo, 査読有, 62 (2013), pp111-125, DOI 10.1007/s12215-013-0112-z.

〔学会等発表〕(計１３件)

① T.Katsura, Configurations of smooth rational curves on supersingular K3 surfaces in small characteristics, Research Seminar Algebraic and Arithmetic Geometry, March 5, 2015, Leibniz University Hannover, Hannover (Germany) (招待講演)

② T.Katsura, On a 1-dimensional family of Enriques surfaces in characteristic 2, Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, January 28, 2015, 東京大学大学院数理科学研究科大講義室（東京都目黒区）

③ T.Katsura, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, The 4th South Kyushu Workshop on Algebra "Complex Ball Quotients and Related Topics" July 14, 2014, 熊本大学 くすの木会館（熊本県熊本市）(招待講演)

④ T.Katsura, Arrangements of smooth rational curves on the superspecial K3 surface in characteristic 5, Algebraic Geometry Seminar, March 3, 2014, University of Amsterdam, Amsterdam (The Netherlands)（招待講演）

⑤ T.Katsura, Some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, Research Seminar Algebraic and Arithmetic Geometry, February 25, 2014, Leibniz University Hannover, Hannover (Germany)（招待講演）

⑥ 桂 利行, 標数５の超特殊 K3 曲面上の有理曲線について（島田伊知朗、金銅誠之両氏との共同研究）, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2013 年 10 月 22 日, 兵庫県立城崎大会議館（兵庫県豊岡市）(招待講演)

⑦ T.Katsura, Relations between some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, Conference on Classification of Algebraic Varieties and Related Topics, September 12, 2013, Grand Hotel San Michele, Cetraro (Italy) (招待講演)

⑧ 桂 利行, Some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, 第 12 回アフィン代数幾何学研究集会, 2013 年 9 月 5 日, 関西学院大学梅田キャンパス（大阪府大阪市）（招待講演）

⑨ 桂 利行, Some invariants of algebraic varieties in positive characteristic, 南九州代数系集会, 2013 年 9 月 1 日, 鹿児島大学理学部（鹿児島県鹿児島市）（招待講演）

⑩ T.Katsura, Configurations of rational curves on superspecial K3 surfaces in small characteristics, Algebraic Geometry Seminar, March 4, 2013, University of Amsterdam, Amsterdam (The Netherlands) （招待講演）

⑪ 桂 利行, 超特殊 K3 曲面上の有理曲線の配置について, 代数幾何セミナー, 2012 年１１月 26 日, 東京大学大学院数理科学研究科 大講義室（東京都目黒区）（招待講演）

⑫ 桂利行, Invariants of algebraic varieties in positive characteristic, 射影代数多様体の幾何とその周辺 2012 研究集会, 2012 年 10 月 7 日, 高知大学理学部（高知県高知市）（招待講演）

⑬ 桂 利行, 正標数の超特殊 K3 曲面上の有理曲線の配置について, 2012 年 8 月 30 日, 熊本大学理学部（熊本県熊本市）（招待講演）

〔図書〕(計 1 件)

① 桂利行, 栗原奨人, 堤誉志雄, 深谷賢治, 背理法（担当部分:「論理の中の背理法」pp1-40）, 数学書房, 2012 年, 総ページ数 128, 査読無

〔解説論文〕(計 3 件)

① 桂 利行, 大きな素数の応用—RSA 暗号, 数学文化, 23 (2015), pp51―62, 査読無

② 桂 利行, 標数 5 の超特殊 K3 曲面上の有理曲線について（島田伊知朗, 金銅誠之氏との共同研究）, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集 (2014), pp15―24, 査読無

③ 桂 利行, Invariant of algebraic varieties in positive characteristic, 射影多様体の幾何とその周辺 2012 研究集会報告集 (2013), pp69―74, 査読無

〔論説〕(計 2 件)

① 桂 利行, 数学からのイノベーション, 数学文化, 査読無, 日本評論社, 22 (2014), pp2-3

② 桂 利行, 数学的な感覚の探求 12 回「美しきものを見し人は」, 数理科学, 査読無, サイエンス社, 2013 年 10 月号, pp60-64

〔講演〕(計 1 件)

① 桂 利行, 対称性とあみだくじ, 幾何学とインターネットの数理 2012, 2012 年 7 月 14 日, 東京

大学玉原国際セミナーハウス（群馬県沼田市）

〔社会への発信（公開講座）〕（計４件）
① 桂 利行, 代数多様体の分類の要—小平次元とはどんな次元？, 高校生と社会人のための現代数学・物理学入門, 新春特別講義「次元」, 2015 年 1 月 11 日, 東京大学理学部小柴ホール（東京都文京区）
② 桂 利行, 大きな素数の応用—RSA 暗号, 数学文化公開講演会, 2014 年 6 月 28 日, 山形大学理学部 (山形県山形市)
③ 桂 利行, 素粒子は代数幾何の世界を飛ぶか, 高校生と社会人のための現代数学・物理学入門, 新春特別講義「幾何の世界」, 2014 年 1 月 11 日, 東京大学理学部小柴ホール（東京都文京区）
④ 桂 利行, n 次方程式を解いてみよう, 高校生と社会人のための現代数学・物理学入門, 新春特別講義「対称性」, 2013 年 1 月 13 日, 東京大学理学部小柴ホール（東京都文京区）

〔その他〕
ホームページ等
http://kat.k.hosei.ac.jp/

６．研究組織
(1) 研究代表者
桂　利行（KATSURA, Toshiyuki）
法政大学・理工学部・教授
研究者番号：４０１０８４４４

(2) 連携研究者
金銅　誠之（KONDO, Shigeyuki）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：５０１８６８４７
島田　伊知朗（SHIMADA, Ichiro）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：１０２３５６１６

(3) 海外研究協力者
Gerard van der Geer
Universiteit van Amsterdam,
Korteweg-de Vries Instituut, Professor