様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：３２７１４
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００５７

研究課題名（和文）被覆代数曲線と曲面上の代数曲線から見たフルヴィッツの問題

研究課題名（英文）Hurwitz' problem through double covers of curves and curves on surfaces

研究代表者
米田　二良（Komeda, Jiryo）

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授

研究者番号：９０１６２０６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：4次平面代数曲線の2重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群について被覆の種数が6,7,8の場合に共同研究で解決し、3本の論文が出版または印刷中である。平面代数曲線の二重被覆が射影平面の二重被覆であるdouble sextic（特異点を許す）に拡張できる場合の分岐点のワイエルシュトラス半群についての共同研究を投稿し、現在印刷中である。
海外共同研究者とは共著の論文"Weierstrass semigroups on double coverings of genus 4 curves"が出版された。また、次数5の平面代数曲線の二重被覆が種数が大きい場合に結果を得て投稿し、現在印刷中である。

研究成果の概要（英文）：A research collaboration person and I studied on the Weierstrass semigroups of ramification points on double covers of plane curves of degree 4 and three papers about this subject were published or accepted for publication. Another research collaboration person and I investigated the Weierstrass semigroups of ramification points on double covers of plane curves which can be extended to double covers of projective planes, which may have singularities (if the double covers have no singularities, then they are K3 surfaces). We submitted the paper about this topic, and the paper was accepted.
The joint work with the overseas co-investigator was publised. The title is Weierstrass semigroups on double coverings of genus 4 curves. Moreover, the co-investigator and I got the result on the Weierstrass semigroups of ramification points of double covers of plane curves of degree 5 when the genera of the double covers are larger than 17. The paper about this result is being printed at present.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ワイエルシュトラス半群　数値半群　代数曲線　二重被覆　Ｋ３曲面　平面代数曲線　有理曲面

1. 研究開始当初の背景

(1) フルビッツの問題とは、数値半群が代数曲線の点のワイエルシュトラス半群で実現されるための計算可能な必要十分条件を求めよである。その必要条件は初めて Buchweitz によって求められた。
(2) Torres は、二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を研究することで、Buchweitz の条件が十分条件でないことを示した。
(3) 連携研究者との共同研究で、有理線織面のブローイングアップ、有理曲面のブローイングアップ、ブローイングダウンを使って、超楕円曲線の二重被覆でワイエルシュトラス点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群を決定した。また、同様の方法で、d 次平面代数曲線を対合で割った商曲線の、接線との接触度が d-3、d-4 である点の下にある分岐点のワイエルシュトラス半群を求めた。これらの結果は論文として出版された。
(4) 共同研究者が、トーリック曲面上の代数曲線の点のワイエルシュトラス半群について研究をし、結果を得ている。
(5) K３曲面上の曲線の点のワイエルシュトラス半群については実現されないものについてしか知られていない。
(6) 本研究の動機は、フルビッツの問題を解くことではあるが、上記のことから、この問題を曲面上の代数曲線の点のワイエルシュトラス半群とからめて考察することも興味深いことと考える。
(7) 平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群については次数４のとき、被覆曲線の種数が 9 以上の場合に決定し、そのけっかが出版された。
(8) 種数が４の代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群については、被覆曲線の種数が下の曲線の種数の３倍以上、すなわち、12 以上については、海外共同研究者等との共同研究で決定した。
(9) 本研究者は、５以上の種数の代数曲線の二重被覆の分岐点を研究することで、Torres の方法では見つからなかった代数曲線のワイエルシュトラス半群として実現されない数値半群を構成した。

２．研究の目的

(1) 種数 2 の代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を決定すること。この場合、残っている場合は、下の曲線の分岐点は通常点であり、被覆の種数は 3,4 である。
(2) 平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群としてどのようなものが実現されるかを求める。
(3) 平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として実現されない例を作る。
(4) K３曲面上の代数曲線の点のワイエルシュトラス半群として実現されるものを求める。
(5) 数値半群の算術的性質を通して代数曲線並びにその二重被覆を調べる。
(6) 平面代数曲線のガロア点と射影直線の巡回被覆の分岐点であるガロア・ワイエルシュトラス点との関係を調べる。
(7) トーリック曲面上の代数曲線が射影直線の巡回被覆になるための条件についてワイエルシュトラス半群を使って記述する。
(8) 対称数値半群の数値半群全体の中での密度を調べる。
(9) フルビッツの問題に関連して、対称数値半群とそうでない数値半群の算術的な関係を調べる。フルビッツの問題で、対称数値半群の果たす役割を考察する。

３．研究の方法

連携研究者と共催で、毎年 12 月に「代数曲線論シンポジウム」を開催し、代数曲線論の発展に貢献すると共に、講演者や参加者と本研究に関する話題でディスカッションする。連携研究者、海外共同研究者とは互いの大学を訪問し、共同研究を実施する。研究協力者については、神奈川工科大学を訪問してもらい共同研究する。この旅費は基本的には、こちらの科研費から支出する。なお、研究の目的の(1)から(9)に対応して研究の方法が書かれている。

(1) 可能性のあるワイエルシュトラス半群に対して、種数 2 の代数曲線の二重被覆を具体的に構成して確かめる。
(2) 平面代数曲線の二重被覆を構成するには、平面代数曲線の因子を調べることになる。特にある条件を満たす因子が、各点の重複度が１以下の因子と線形同値であることを示す必要がある。よって、そのような因子を構成する方法を考える。
(3) どのような数値半群の場合に平面代数曲線で各点の重複度が１以下の因子と線形同値になり、コホモロジーの次元の条件を満たす因子が作れないかを考察する。
(4) K３曲面として射影平面の二重被覆である double sextic をとる。さらに、K３曲面上の代数曲線は、平面代数曲線の二重被覆になるものを考える。このとき、これまで研究してきた平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を求める方法やその結果を使う。
(5) 数値半群の導手は、代数曲線の標準因子の形と関係がある。また、二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群からその下の点のワイエルシュトラス半群を求めるにはそれに属する偶数を２で割ったものを求めれば良いことが知られている。

これらのことを使って、代数曲線並びに代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群について調べる。

(6) ガロア点をもつ平面代数曲線とガロア・ワイエルシュトラス点をもつ代数曲線の関数体は記述することができる。その２つの方程式を通して関係を調べる。

(7) トーリック曲面上の代数曲線のワイエルシュトラス半群は二次元の凸体内部にある直線の格子点の個数で記述される。それが射影直線の巡回被覆の分岐点の場合であるためにはどのような条件をみたすかどうかを調べる。

(8) 種数を固定したとき、ある性質をみたす数値半群の数値半群全体の中での密度が種数を十分大きくしたとき、０に近づくをことを示す方法を Kaplan と Ye が開発した。その方法またはそれを改善した方法を使う。

(9) 数値半群から対称数値半群を構成する方法と数値半群の種数を１下げる方法は知られている。これらを二重被覆の構成方法と結びつけて、ワイエルシュトラス半群を計算し、フルビッツの問題の解決のための糸口を与える。

４．研究成果

「研究成果」の番号は、(1)から(9)まで「研究の目的」の番号と対応している。ここでは、目的に対応させて成果を述べることにする。

(1) 連携研究者、研究協力者と共同で可能性のある数値半群に対して、それをワイエルシュトラス半群としてもつ種数 2 の二重被覆の構成ができた。これによって種数 2 の二重被覆の場合は解決された。この結果は論文として出版された。

(2) 研究協力者との共同研究で、平面４次曲線の２重被覆で種数が 6,7,8 の場合に分岐点のワイエルシュトラス半群をすべて決定した。そのことに関する論文は出版または受理され印刷中である。この結果、種数 3 の曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群については、解決されたことになる。海外共同研究者との共同研究で、次数が 5 の平面代数曲線の二重被覆であって接線との接触度が 5 の点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群を決定している。この場合には二重被覆の種数が 18 以上のとき、4 次平面代数曲線と同様に、可能性のあるすべての数値半群がワイエルシュトラス半群として実現される。また、接線との接触度が 4 の場合にもその上にある分岐点のワイエルシュトラス半群をすべて決定した。この場合には、可能性のある数値半群のうち 2 つのものが二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として実現されないことも示した。平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群の研究は、その平面代数曲線に特殊な因子が取れるかどうかの問題に帰着でき、平面代数曲線の研究に役に立つと考えている。

(3) 6 以上の次数ｄの平面代数曲線の二重被覆であって接線との接触度が d-1 の点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群として得られない２種類の例を与えた。また、5 以上の次数ｄの平面代数曲線の二重被覆について、接線との接触度が d-2 の点の上にある分岐点のワイエルシュトラス半群として得られる例を２種類、得られない例を 2d-7 種類与えた。特に d=5 の場合には得られない例を５種類与えている。

(4) 研究協力者と共同して平面代数曲線の二重被覆が射影平面上の二重被覆（これが非特異ならＫ３曲面になる）に拡張できる条件を調べた。d 次平面代数曲線の分岐点が、接線との接触度が d の場合と d-1 で特別な場合に、拡張できるための必要十分条件を二重被覆曲線の分岐点のワイエルシュトラス半群で記述した。この結果は論文として受理され現在印刷中である。また、この考え方を応用して、K3 曲面上の代数曲線を構成し、その曲線上の点のワイエルシュトラス半群を計算した。これらの曲線と点は、d 次平面代数曲線の二重被覆とその分岐点である。また、平面代数曲線上の分岐点は接線との接触度が d または d-1 で、d-1 の場合には共同研究者との結果より条件が緩和されている。この話題については、2015 年 3 月に埼玉大学で開催された代数幾何ミニ研究集会で発表した。K3 曲面上の代数曲線の点がどのようなワイエルシュトラス半群を実現できるかについては今まで知られていなかったことであり、意義のある結果と考えられる。

(5) 準対称数値半群をそれに属している偶数を使っての特徴付けをし、準対称数値半群が、いつ代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として実現されるかを、d 次平面代数曲線の二重被覆に限定して考察した。3 種類の半群については実現されることが分かった。このことを使って、d が 5 以下の場合にはこの問題は解決された。これらの結果を 2015 年 2 月に RIMS で開催された研究集会で発表した。準対称数値半群は、数値半群の中でも、非常に特殊なものであることがこの研究でわかり、この数値半群を詳細に研究することは、フルビッツの問題の解決に貢献できるものと考える。

(6) 研究協力者との共同研究で、ガロア点をもっている平面代数曲線が二重被覆になっていて、そのガロア点が二重被覆の分岐点になっているときの完全な特徴付けができた。それは、被覆の下の代数曲線の分岐点が、ガロア・ワイエルシュトラス点である、すなわち射影直線の巡回被

覆の総分岐点であることと同値になる。この論文は、現在執筆中である。ガロア点を二重被覆の分岐点から見た研究は今までなく、これは意義のある結果と思われる。

(7) 代数曲線の点のワイエルシュトラス半群とアフィン・トーリック多様体の座標環の関係について ”Weierstrass numerical semigroups and affine toric varieties”というタイトルで、2013 年 3 月に開催された第１１回アフィン代数幾何学研究集会で講演した。特に 2 次元アフィン・トーリック多様体との関係について詳しく述べた。これは研究協力者と共同研究で進めている射影直線の巡回被覆でトーリック曲面上の代数曲線であるものの分岐点のワイエルシュトラス半群と密接な関係があると考えている。この関係が明らかになると、トーリック多様体がフルビッツの問題を解決するためにどのような役割を果たすかが見えてくると思われる。

(8) ある条件を満たす種数 g の数値半群が種数 g の数値半群全体の中でどれ位の割合を占めているかは興味深い問題である。また、この問題は黄金比とも関係があり、整数論的にも重要である。ところで、数値半群を見る指標として導手がある。これは 2g 以下であり、大きい程、特殊であるように思える。実際、導手が 2g-20 以上のときは、全体の中で占める割合は、g を無限大に近づけると、0 に近づくことを示すことができた。よって、対称数値半群、すなわち導手が 2g である数値半群の割合は 0 に近づく。このことを含んだ結果を 2014 年 2 月に開催された RIMS の研究集会で講演した。その内容については数理解析研究所講究録から出版されている。

(9) 数値半群 H に対して種数 1 を下げた数値半群 p(H) を対応させることができるが、これと H に属している偶数全体を 2 で割った数値半群 d(H) との関係を調べた。この方法は、フルビッツの問題の解決のためには、有効な手段と考えている。実際、このことからフルビッツの問題は、特別な対称数値半群について解ければよいことになる。今後、この半群を詳しく調べていく積もりでいる。このことに関する論文は、現在執筆中である。また、これに関連した内容を 2013 年 3 月に埼玉大学で開催された代数幾何ミニ研究集会で講演した。また、この研究集会の報告集としてこの内容の論文が電子報告集として出版されている。

５．発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 18 件）

[1]T.Harui,J.Komeda, Numerical semi-groups of genus six and double coverings of curves of genus three, To appear in Semigroup Forum, 査読有
DOI:10.1007/s00233-014-9671-3

[2]J.Komeda,K.Watanabe, On extensions of a double covering of plane curves and Weierstrass semigroups of the double covering type, To appear in Semigroup Forum, 査読有
DOI:10.1007/s00233-015-9718-0

[3]T.Harui,J.Komeda, Numerical semi-groups of genus seven and double coverings of curves of genus three, Semigroup Forum, 査読有、90, 2015, 491-502
DOI:10.1007/s00233-014-9621-0

[4]J.Komeda, Numerical semigroups which are not the Weierstrass semigroups on double covers of plane curves, 神奈川工科大学研究報告 B 理工学編、査読有、39, 2015, 45-50

[5]T.Harui,J.Komeda,A.Ohbuchi, The Weierstrass semigroups on double covers of genus two curves, Tsukuba J. Math., 査読有、38, 2014, 201-206

[6]J.Komeda, The proportion of numerical semigroups with no descendant or an infinite number of descendants, 数理解析研究所講究録、査読無、1915, 2014, 53-57

[7]T.Harui,J.Komeda, Numerical semi-groups of genus eight and double coverings of curves of genus three, Semigroup Forum, 査読有、89, 2014, 571-581
DOI:10.1007/s00233-014-9590-3

[8]J.Komeda, Sequences of Weierstrass semigroups、代数幾何ミニ研究集会（埼玉大学）電子報告集、査読無、2013, 7pages

[9]J.Komeda,The parents of Weierstrass semigroups and non-Weierstrass semigroups、数理解析研究所講究録、査読無、1873, 2014,1-6

[10]S.Kim,J,Komeda, Weierstrass semi-groups on double covers of genus four curves, J.Algebra, 査読有、405, 2014, 142-167
DOI:10.1016/j.jalgebra.2014.02.006

[11]J.Komeda, Numerical semigroups and affine spaces, 神奈川工科大学研究報告 B 理工学編、査読有、38, 2014, 15-19

[12]J.Komeda,S.Matsutani,Sigma functions for a space curve of type <3,4,5>, J. Geometry and Symmetry in Phisics, 査読有、30, 2013, 75-91
DOI:10.7546/jgsp-30-2013-75-91

[13]J.Komeda,The parents of Weierstrass semigroups and non-Weierstrass semigroups, 数理解析研究所講究録、査読無、1873, 2014, 1-6

[14]J.Komeda,S.Matsutani,E.Previato, The sigma functions for Weierstrass semigroups <3,7,8> and <6,13,14,15,16>, International J. Math、査読有、24, 2013, 1-58
DOI:10.1142/s0129167X13500857
[15]J.Komeda, Double coverings of curves and non-Weierstrass semigroups, Communications in Algebra, 査読有、41, 2013, 31-324
DOI:10.1080/00927872.2011.629324
[16]J.Komeda, Diagrams of Buchweitz numerical semigroups, 神奈川工科大学研究報告 B 理工学編、査読有、37, 2013, 11-15
[17]J.Komeda, The fractional map by two and the parent map of numerical semigroups, 数理解析研究所講究録、査読無、1809, 2012,198-204
[18]J.Komeda,A.Ohbuchi, Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces, Tsukuba J. Math., 査読有、36, 2012, 217-233

〔学会発表〕(計 8 件)
[1] 米田 二良、Curves on double sextics and Weierstrass semigroups, 代数幾何ミニ研究集会、2015 年 3 月 11 日、埼玉大学（さいたま市）
[2] 米田 二良、Quasi-symmetric numerical semigroups and double covers of curves, 「代数系・論理・言語と計算機科学の新たな接点」研究集会、2015 年 2 月 16 日、京都大学数理解析研究所（京都市）
[3] Jiryo Komeda, Weierstrass semigroups on double covers of plane curves, International Research Meeting “Semigroups, Languages and Algebras”, 2014 年 8 月 7 日、秋田大学（秋田市）
[4] Jiryo Komeda, Hurwitz’s problem and symmetric numerical semigroups, Kyoto Mini Workshop 2014, 2014 年 8 月 2 日、京都産業大学（京都市）
[5] 米田 二良,The proportion of numerical semigroups with no descendant or an infinite number of descendants, 「計算機科学における論理・代数・言語」研究集会、2014 年 2 月 17 日、京都大学数理解析研究所（京都市）
[6] 米田 二良、Sequences of Weierstrass semigroups, 代数幾何ミニ研究集会、2013 年 3 月 27 日、埼玉大学（さいたま市）
[7] 米田 二良、Weierstrass numerical semigroups and affine toric varieties, 第 11 回アフィン代数幾何学研究集会、2013 年 3 月 3 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪市）
[8] 米田 二良,The parents of Weierstrass semigroups and non-Weierstrass semigroups, 「代数とコンピュータサイエンス」研究集会、2013 年 2 月 18 日、京都大学数理解析研究所（京都市）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/komeda/research/

６．研究組織
(1)研究代表者
米田　二良（KOMEDA, Jiryo）
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065

(2)連携研究者
大渕　朗（OHBUCHI, Akira）
徳島大学大学院･ソシオアーツアンドサイエンス研究部･教授
研究者番号：10211111

(3)研究協力者
春井　岳 (HARUI, Takeshi)
渡邉　健太 (WATANABE, Kenta)
川口　良 (KAWAGUCHI, Ryo)
高橋　剛 (TAKAHASHI, Takeshi)