3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年 １０ 月 ２６ 日現在

機関番号：３６１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００５８
研究課題名（和文）整環と付値環の総合的研究

研究課題名（英文）The integrated study of orders and valuation rings

研究代表者
丸林　英俊（Marubayashi, Hidetoshi）

徳島文理大学・理工学部・教授

研究者番号：００００３４７０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：整環と付値環について研究した．整環に関しては①森田コンテクスト環が極大整環になる必要且つ十分条件を加群の立場から与えた．②歪多項式環及び微分多項式環が一般化された浅野環になる必要且つ十分条件を与えた．③遺伝的環上の歪多項式環の射影的イデアルの構造を完全に記述することが出来た．この成果は、新しい環のクラス”一般化された遺伝子的環”の発見に繋がった．付値環に関しては④接合積の上の次数つき拡大の素イデアルの構造の研究を行つた．

研究成果の概要（英文）：We study orders and valuation rings. About order theory, ① we give the necessary and sufficient conditions for the ring of Morita contexts to be maximal orders in terms of modules theory.② we obtain that the necessary and sufficient conditions for skew polynomial rings and differential polynomial rings to be generalized Asano rings. ③we completely describe the structure of projective ideals in skew polynomial rings over hereditary rings, which leads us to find a new class of rings being called "generalized hereditary rings".
About the study of valuation rings,④we study prime ideals in graded extensions for crossed product algebras.

研究分野：数学

キーワード：環論　イデアル　極大整環　付値環　遺伝的環

１．研究開始当初の背景
整環及び付値環の研究は乗法的イデアル,global dimension, Krull dimension 等の研究が主に行われていた.

２．研究の目的
具体的整環である the ring of Morita Contexts が極大整環になる必要且つ十分条件を与えること.
Ore-Rees rings が極大整環になる条件を与えること.
skew polynomial rings, differential polynomial rings が generaliaed Asano rings になる必要且つ十分条件を与えること.
付値環の研究に関しては、Gauss extensions の over rings､及び standard な Gauss extensions のすべての prime ideals を記述すること.
基礎環が hereditary Noetherian prime rings(HNP rings)の Ore extensions(特に、skew polynomial rings, differential polynomial rings)の代数的構造を、quantum groups への応用を視野に入れながら、研究すること.

３．研究の方法
研究分担者植田玲(島根大学)を本学に招聘し、また、海外共同研究者 G.Xie(Gangxi Normal Univ. China), E.Akalan(Hacettepe Univ. Turkey)を訪問し、研究を推進した.

４．研究成果

（1）（雑誌論文③）T = (R,S,V,W)を the ring of Morita contexts とする．ここで、R,S は prime Goldie rings，それらの商環を、それぞれ、Q(R),Q(S)で表わす．V は(R,S)-bimodule，W は(S,R)-bimodule とする．1988 年に、 T が maximal order になる必要且つ十分条件を与えた.
本研究では bimodules V，W の性質を用いて、T が maximal order になる必要且つ十分条件を与えると共に、T の v-ideals の作る group D(T)が R の v-ideals の作る group D(R)に自然に群として同型であることを示した.
更に、Q(V) = Q(R)V = VQ(S) の中に v-(R,S)-modules という概念を導入し、D(R)と D(V)の間に、自然な、１－１対応があることを示した. ここで､D(V)は Q(V)の中にある v-(R,S)-modules 全体の集合を表す.
本研究の加群の立場からの研究は､整環の理論が加群の研究へと発展させることが出来る可能性を示唆している.
実際、M.Alkan が整環の立場から加群の研究を共同で推進することを提案してきた. ２０１６年夏以降共同研究をすることで同意した.

（2）（雑誌論文⑥、⑦）R を prime Goldie ring,σを R の automorphism,δを R の derivation とする．Skew polynomial rings,及び、differential polynomial rings を整環の立場から研究した.
主な成果は下記の通り：

Theorem (i) Skew polynomial ring $R[x;\sigma]$が generalized Asano ring になる必要且つ十分条件は R がσ-generalized Asano ring であることである.
(ii) Differential polynomial ring $R[x;\delta]$が generalized Asano ring になる必要且つ十分条件は R がδ-generalized Asano ring であることである.
この定理の証明には $R[x;\sigma]$ ($R[x;\delta]$) のすべての v-ideals を記述することが出来たことを用いる．更に、R がσ-generalized Asano rings であるが、generalized Asano rings でない興味ある例を発見した．しかし、R がδ-generalized Asano ring であるが generalized Asano ring にならない例を見つける事は出来なかった.

（3）(雑誌論文②)R を simple Artinian ring Q の order(整環)とし、σを R の automorphism, δを R の left σ-derivation とする．更に、X を R の invertible ideal でσ(X) = X を満たすと仮定する.
Ore extension $R[t;\sigma,\delta]$ (t is an indeterminate)の subring
$S = R \oplus Xt \oplus \cdots \oplus X^n t^n \oplus \cdots$
は Ore-Rees ring と呼ばれる.
非可換 Rees rings は "PI-conditions" の仮定の下で、Oysteayen 一派により研究された.
本研究では "PI conditions" の仮定なしで、より詳細な order theory と ideal theory を得ることが出来た.
下記は主な結果である：

(i)もし R が maximal order であれば、S も maximal order である．しかし、一般論では、この逆について得ることが出来なかった.
σ= 1 又はδ= 0 の場合、詳細な結果を得ることが出来た.

(ii)δ=0 のとき、Ore-Rees ring S を $R[Xt;\sigma]$で表わし、skew Rees ring と呼ぶ.
(a)skew Rees ring $R[Xt;\sigma]$が maximal order である必要かつ十分条件は R が(σ;X)-maximal order である.
（b）R が(σ;X)-maximal order のとき、

R[Xt;σ]の任意のｖ－イデアルAは次の形のみである：

$$A = t^n \omega a[Xt;\sigma]$$

,ここでωは Q[t;σ]の商環の中の center の元であり、
aはRの(σ;X)-stable v-idealであり、
nは non negative integer である.

(iii)σ =1のとき、Ore-Rees ring S をR[Xt;δ]で表わし、differential Rees ring と呼ぶ.
(c)differential Rees ring R[Xt;δ]が maximal order である必要かつ十分条件はRが(δ;X)-maximal order である.
(d) Rが（δ；X）-maximal order のときR[Xt;δ]の任意のv-ideal A は次の形のみである.

$$A = a[Xt;\delta]\omega$$

,ここで、a は(δ;X)-stable v-ideal で、ωはQ[t;δ]の商環の center の元である.
基礎環Rがmaximal orderでなくても、(σ;X)-maximal order になる例、及び、(δ;X)-maximal order になる例を、hereditary Noetherian prime rings の具体的な例を基にして、構成することも出来た.

（4）(雑誌論文⑨,⑩) K を skew field, V を K の total subring、G を cone P をもつ right ordered group, the crossed product algebra K*G の quotient skew field を D とする.
論文：Gauss extensions and total subrings for crossed products, J. Algebra, 2007
で D の total subrings R で代数的に自然な条件を満たしているものに、Gauss extensions と名付け、Gauss extensions R と graded extensions A = R ∩K*G との間に、1対1対応があることを証明した. このことは、Gauss extensions の代数的構造を解明するためには、graded extensions の代数的構造を研究すればよいことを示している.
下記が本研究での主な成果である.

(i)R の overrings 及び overrings S で S ∩K = V を満たすものすべてを graded extension A の graded completely prime ideals を用いて記述することが出来た.

(ii)V の overring W を用いて、自然な graded extension A を構成し（それらをを standard graded extensions と名付けた）A のすべての graded prime ideals を、the cone P,及び V の prime ideals を使用して、記述することが出来た.

(iii)Gauss extensions, standard graded extension の興味ある例を見つける事が出来た.

(iv) G = Z, the ring of integers，のとき、より詳細な overrings の構造、及び graded extensions の分類をすることが出来た.

（5）(雑誌論文⑤) R を bounded Noetherian prime ring とする. 次の３つの条件は同値であることを証明した：
(i) R is a G-Dedekind prime ring.
(ii) For every regular element c of R, cR and Rc contain a finite product of invertible prime ideals, respectively.
(iii) Every prime ideal of R contains an invertible ideal.

（6）(雑誌論文④)R を prime Goldie ring, σを R の automorphism,δを left σ-derivation on R とする. もし R が maximal order であれば、Ore extension R[x;σ,δ]は maximal order であることは、１９８１年に M.Chamrie により証明されている. しかし、その逆も成立するか？は未解決の問題であった.
本研究中に、“逆は成立しない”ことを示すことが出来た. つまり、R は maximal order でないが、Ore extension R[x;σ,δ]は maximal order になる整環 R を構成することに成功した.

（7）(雑誌論文①) hereditary Noetherian prime ring(HNP rings)の研究は１９６０年～１９８０年の間に盛んに行われ、多くの成果が得られた. しかし、ＨＮＰ rings の上の多項式環の研究は現在まで行われていなかった.
本研究では、R を prime Goldie ring, σを R の automorphism とする. Skew polynomial ring R[x; σ] の projective ideals は

$$Xa[x;\sigma]$$

の形しかないことを示すことが出来た. ここで、X は invertible ideal で a は R のδ-invariant eventually idempotent ideal である.
この結果から、新しいタイプの整環が存在することが分った（このタイプの整環を generalized HNP rings と名付けた).
現在、generalized HNP rings の代数的構造、特に、projective ideals の構造を研究中である.
すでに、(i) G-HNP rings の structure theorem.

(ii) R[x;δ]は G-HNP ring である．ここで R は HNP ring, δは R の derivation．
(iii) idealizer の理論を用いて、多くの G-HNP rings の例を見つけている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１０　件）

① E.Akalan and H.Marubayashi, Multiplicative ideal theory in non-commutative rings, to appear in Proceedings of Arithmetic and Ideal Theory of Rings and Semigroups, Springer, 査読有.

② M.R.Helmi, H.Marubayashi and A. Ueda, Ore-Rees rings which are maximal orders, Journal of Math. Soc. Japan、査読有、68,2016, 405-423.

③ E.Akalan, P.Aydogdu, H.Marubayashi and B.Sarac, Rings of Morita contexts which are maximal orders, J. Algebra and Its Applications,査読有、15,2015, 1-13.

④ H.Marubayashi and A.Ueda, Examples of Ore extensions which are maximal orders whose based rings are not maximal orders, Proceedings of the 48th Symposium on Rings Theory and Representation Theory, 査読有、2015,134-139.

⑤ E.Akalan, M.R.Helmi, H.Marubayashi and A.Ueda, Bounded generalized Dedekind prime rings, Bull. Math, Soc. Sci. Math. Roumanie, 査読有, 56, 2013, 25-31.

⑥ M.R.Helmi, H.Marubayashi and A.Ueda, Differential polynomial rings which are generalized Asano prime rings, Indian Pure and Appl. Math., 査読有,44, 2013,673-681.

⑦ Intan-Muchtadi-Alamssyah,H.Marubayashi and A.Ueda, Skew polynomial rings which are generalized Asano prime rings, J. of Algebra and Its Applications,査読有, 12, 2013, 15-23.

⑧ S.Irawati and H.Marubayashi, Some properties of R[x,sigma] related to the bounded Krull order, JP Journal, Number Theory and Applications,査読有,27, 2012, 85-93.

⑨ H.H.Brungs, H.Marubayashi and E.Osmanagic, Prime ideals in graded extensions for crossed products algebras, Communications in Algebra, 査読有, 40, 2012, 1951-1973.

⑩ H.Marubayashi and G.Xie, Graded extensions in a skew Laurent polynomial ring, Southeast Asian Bulletin of Math., 査読有,36, 2012, 441-447.

〔学会発表〕（計４件）

(1) H. Marubayashi, Differential Rees rings which are maximal orders, International Conference on Recent Trends in Algebra and Analysis with Applications,(ICRTAAA-2014), Aligarh Muslim University, India (招待講演).

(2) H. Marubayashi, Ore-Rees rings which are maximal orders, Arithemetic and Ideal Theory of Rings and Semigroups, University of Graz, Austria, 2014 (招待講演).

(3)H. Marubayashi, Arithemetic ideal theory in noncommutative rings, International Conference on Radicals, Rings, Near-rings, and other algebraic structures, (ICOR 2015), Austria (招待講演).

(4) H. Marubayashi and A. Ueda, Examples of Ore extensions which are maximal orders whose based rings are not maximal orders, Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Nagoya University, 2015.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者　　丸林　英俊
(Marubayashi Hidetoshi)
（徳島文理大学 理工学部　教授）

研究者番号：00034702

(2)研究分担者　　植田　玲
(Ueda Akira)
（島根大学 総合理工学研究科（研究院）
教授）

研究者番号：70213345

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：