2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４５４００６１

研究課題名（和文）ツイスター空間の研究

研究課題名（英文）Study on twistor spaces

研究代表者
本多　宣博（Honda, Nobuhiro）

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：６０３１１８０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：数理物理ないしリーマン幾何的な理論的背景をもつ空間の構造を研究した。この空間はツイスター空間とよばれ、複素数を用いて記述される3次元の幾何的な対象である。本研究ではツイスター空間の幾何学的な構造を研究した。その際に主要な道具となるのは、ツイスター空間上の有理型関数である。有理型関数が豊富に存在することを示すことができれば、それらを用いてツイスター空間の構造が詳しくわかることになる。最終的には、ツイスター空間を、定義式を具体的に書き下すということを行った。ツイスター空間は、上記のように独特の理論的背景を持つことから、その詳しい構造を調べることは数学・数理物理の両面から興味が持たれる。

研究成果の概要（英文）：The main topic of this investigation is to analyse structure of spaces which have background from Riemannian geometry and mathematical physics. This space is called twistor spaces, and is 3-dimensional object which can be descrbed using complex numbers. We intensively investigated geometric structure of twistor spaces. The main tool for the analysis is meromorphic functions on the twistor spaces. Namely I proved existence of meromorphic functions which are enough for describing structure of the spaces. In particular, I described a series of twistor spaces in terms of simple polynomials.

研究分野： 複素幾何学

キーワード： ツイスター空間　有理多様体　二重被覆空間　スカラー平坦ケーラー計量

１．研究開始当初の背景

リーマン計量のワイル共形曲率テンソルは共形変換で不変であり、これが0となるリーマン計量は共形平坦計量である。向きづけられた4次元多様体上ではワイル共形曲率テンソルは自己双対成分と反自己双対成分に分解し、そのうちの一方が消えるリーマン計量のことを(反)自己双対計 量という。ゲージ理論では(反)自己双対接続が主要な役割を果たすが、自己双対計量はその多様体版とみなすことができ、4 次元多様体の幾何学において重要な役割を果たすことが期　待されている。

自己双対計量のもっとも著しい性質は、複素幾何学との結びつきである。すなわち自己双対計量には自然にツイスター空間と呼ばれる 3 次元複素多様体が付随し、自己双対計量の共形幾何的な性質はすべてツイスター空間に伝えられる。ツイスター空間は、自己双対計量というある意味で解析的な対象を、幾何学化したものとみなすことができる。自己双対計量とツイスター空間の基本的な性質は 1978 年に出版された Atiyah-Hitchin-Singer の論文で確立された。代数的なコンパクトツイスター空間の具体例としては、Poon-LeBrun (1986, 1991), Campana-Kreussler (1998), Joyce-Fujiki (1995,2000) によるものがあったが、これらは代数的なコンパクトツイスター空間のうちごく一部に過ぎないのではないかと考えられた。実際、2008 頃から 2010 頃までに行われた(筆者による)研究で、新たな代数的なコンパクトツイスター空間の例が大量に構成された。より具体的には、多重反標準系を使うことによりツイスター空間の本格的な構造解析ができるようになった。

２．研究の目的

上記のようにツイスター空間は自己双対量を幾何学化したものとみなすことができる。自己双対計量そのものを構成したり調べたりすることは容易ではないが、ツイスター空間に移ると幾何的な直観を働かせる余地が大幅に増えるため見通しがずっとよくなり、また空間そのものの記述もずっと簡潔になることが多い。したがってより本質を捉えた理解の仕方になっていると考えられる。

3 次元複素射影空間や 3 次元旗多様体はコンパクトツイスター空間のもっとも基本的な例であるが、これら以外には射影代数的なコンパクトツイスター空間は存在しない (Hitchin 1981)。しかし射影性をはずして単に代数的とすると上記のようにある程度の具体例が知られている。こうした代数的ツイスター空間の構 造を調べ分類することはこの分野の中心的な問題であると考えられる。なお、代数的なコンパクトツイスター空間をもつ4次元多様体は複素射影平面の連結和に限る。(Campana 1991)

すでに述べたように、近年になって、多くの具体例が発見され、その構造が調べられた。しかし特別な場合を除き、分類結果を得る状態までは至ってはいなかった。本研究はより多くの具体例を構成・解析すること、また自然な条件を課して分類を行うことを目的とする。

３．研究の方法

具体的な研究方法としては、ツイスター空間の多重反標準系に付随する有理写像を調べることが主なやり方となる。特に、この有理写像による像の構造ないし定義方程式を具体的に与え、不確定点解消を与えることが主要な問題である。したがって、研究方法自体は複素幾何における伝統的なやり方に則ったものであると言える。

3 つの複素射影平面の連結和の上のツイスター空間の具体例として、double solid 型とよばれる代数 的なツイスター空間の族がある。これらのツイスター空間は、ツイスター空間全体のモジュライ空間 の中で大きな部分を占める (dense である)/ 3 次元複素射影空間の 4 次曲面で分岐する二重被覆の構 造を持つ/したがってひとつの 4 次同次多項式のみを使って記述できる,という特徴を持つ。このツイスター空間を任意個の複素射影平面の連結和の上のツイスター空間に)一般化することは、この分野で大きなテーマであると考えられる。

これに関して筆者は数年前の研究 (Inv.Math 2008)で C* の作用を持つ場合は自然な一般化があることを示した。それによれば、ツイスター空間は(射影空間そのものではないが、複素射影平面の 個数によって決まる)非常に単純な構造をもった有理多様体の上の分岐二重被覆の構造を持ち、その分岐因子は、上記有理多様体の、4 次超曲面による切断になっている。したがって、これらのツイスター空間はやはり 1 つの 4 次多項式のみを使って記述できることになる。これらのツイスター空間を C* の作用がない場合に一般化する。やはり多重反標準系に付随する有理写像を調べることが主な手段であるが、この場合は C* の作用を持つ場合に使った方法が機能しないため、一般化のためにはまったく新しい方法が必要となる。

実際の構造解析を行う際にまず問題となるのは多重反標準系で像の上に 2 対 1 の有理写像を引き起こすものを見出すことであるリーマンロッホによって多重反標準系の次元を計算することはできないので、次のような手段をとる。まず反標準系の半分のなすペンシルがあるが、これの固定点集合は有理曲線の輪からなる。ここでブローアップすることにより CP^1 への射を得る。多重反標準系を引き戻すと固定成分が出るのでそれらをすべて引き去る。次にそうして得られた線形系を、上記ブローアップの例外因子上に制限して得られる線形系の次元を計算する。最後

に、この制限写像が全射であることを示す。全射性はkernel sheafの１次コホモロジー群が消えることを示すことにより証明する。

４．研究成果

本研究で得られた得られた成果の 1 つめは、4 つの複素射影平面の連結和の上の Moishezon ツイスター空間の分類である。（雑誌論文③）すなわちこれらのツイスター空間は反標準写像により次のように分類されることがわかった。

(1) 反標準写像は像の上に双有理
(2) 反標準写像は像の上に２対１
(3) 反標準写像は像は有理曲面

さらに次のことを示した。(1)のとき、像は P^6 内の３つの２次曲面による完全交叉または P^8 内の 10 個の２次超曲面で定義される非完全交叉。(2)のとき像は conic 上の平面による scroll（すなわち射影 P^4 -> P^2 による conic の逆像）であり、分岐因子はその４次超曲面によるカット。(3)のときも反標準次元および像の定義方程式を具体的に表すことができる。この結果により、4CP^2 の場合に代数的ツイスター空間の全貌が明らかになった。

もう一つの成果は、上記(2)のツイスター空間（つまり二重被覆型）のツイスター空間を、任意個の複素射影平面の連結和の上に一般化したことである。（雑誌論文①）これにあたってはまず、研究方法の欄に書いた方法で、ある具体的な多重反標準系が像の上に 2 対 1 の有理写像を引き起こすことを示した。像は射影 P^n -> P^{n-2}による、正規有理曲線の逆像となる。二重被覆写像の分岐因子は 4 次超曲面によるカットになる。次にこの 4 次超曲面の定義式の具体的な形を求めるために、二重被覆写像を引き起こす線形系がいくつかの可約元をもつことを示した。証明の方針は線形系を例外因子に制限するという、上記と同じものであったが、実際の計算はずっと困難であった。しかしこの場合にも１次のコホモロジーの消滅を示すことができ、くだんの可約元の存在を示すことができた。

もうひとつの成果は、代数次元が１のツイスター空間のある程度系統だった研究である。（研究論文②）今まで構造が調べられてきたツイスター空間は、すべて反標準系の半分が線形系として１次元以上という条件を満たしていたが、今回研究を行ったツイスター空間は、この線形系が一つしか元を持たない（つまり０次元）という性質を持つ。代わりに反標準系そのものが線形系として１次元になっており、その一般元は elliptic ruled または K3 曲面になっている。証明の方針は、これまで使われた方法とかなり異なっており、得られた空間の幾何学的な性質もかなり目新しいものである。特に、K3 曲面のペンシルを持つ場合が本当に起こるということはあまり予想されていなかったことだと思われる。

また、CP^1 上の C 束（アファイン束）の上のスカラー平坦ケーラー計量に関する結果を得た。背景として、CP^1 上の次数が負の直線束上には LeBrun 計量とよばれるスカラー平坦ケーラー計量が存在すること知られていた。本研究では、直線束をアファイン束に小変形したときにスカラー平坦ケーラー計量がついていくことを示した。

また、Joyce 計量と LeBrun 計量の比較問題について考察し、これら２つの計量の具体的な表示を比較することにより、共形同値であることを示した。これら２種類の反自己双対計量のうちもっとも基本的なものと考えられる。Joyce はその論文(Duke 1995)の中で、Joyce計量がある特別な状況ではLeBrun計量と一致すると述べているが、その証明は書かれていなかった。これとは別に、LeBrun 計量の共形変換群も決定した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Nobuhiro Honda Double solid twistor spaces II: general case.J. reine angew. Math. 698 (2015) 181-220.（査読有）
② Nobuhiro Honda, Geometry of some twistor spaces of algebraic dimension one.Complex Manifolds 2 (2015) 105-130.（査読有）
③ Nobuhiro Honda, Moishezon twistor spaces on 4CP^2.J. Algebraic Geom. 23 (2014) no.3, 471-538.（査読有）
④ Nobuhiro Honda, Scalar flat Kaehler metric on affine bundles over CP^1. SIGMA 10 (2014), 046, 25 pages（査読有）
⑤ Nobuhiro Honda and Jeff Viaclovsky, Conformal symmetries of self-dual hyperbolic monopole metrics. Osaka J. Math. 50 (2013) no.1, 197-249.(査読有)
⑥ Nobuhiro Honda, Deformation of LeBrun's ALE metrics with negative mass. Comm. Math. Phys. 322 (2013) 127-148.（査読有）
⑦ Nobuhiro Honda and Jeff Viaclovsky, Toric LeBrun metrics and Joyce metrics. Geometry and Topology 17 (2013) 2923-2934.（査読有）

〔学会発表〕（計９件）

① Nobuhiro Honda, Some examples of twistor spaces of algebraic dimension one, 2015 年 5 月 15 日 Irish Geometry Conference 2015, Limerick (Ireland)
② Nobuhiro Honda, A remark on algebraic dimension of twistor spaces, 2015 年

12 月 26 日多変数関数論冬セミナー、京都大学理学部
③ Nobuhiro Honda, Moishezon twistor spaces, 2016 年 3 月 28 日 Complex Geometry Seminar, MSRI (Berkeley)
④ 本多宣博「4CP^2 上の代数的なツイスター空間の分類」東工大幾何学セミナー 2014 年 4 月 24 日　東京工業大学
⑤ 本多宣博「代数的なツイスター空間の複素幾何学」大岡山談話会　2014 年 6 月 11 日　東京工業大学
⑥ 本多宣博「ツイスター空間の幾何学」日本数学会年会企画特別講演　2014 年 3 月 21 日　明治大学
⑦ Nobuhiro Honda 、 Deformations of LeBrun's ALE metric with negative mass, The 8th Pacific Rim Complex Geometry Conference, 2013 年 8 月 5 日　大連工科大学（中国）
⑧ 本多宣博　「ツイスター理論」第９回 秋葉原微分幾何セミナー 2013年3月30日、東京理科大学神楽坂キャンパス
⑨ Nobuhiro Honda, Deformations of LeBrun's ALE metrics with negative mass, The 18th International Symposium on Complex Geometry, 2012 年 10 月 25 日、信州菅平高原 プチホテル ゾンタック

〔図書〕（計 0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.titech.ac.jp/~honda/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
本多　宣博（Honda, Nobuhiro）
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：６０３１１８０９

(2)研究分担者　なし
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者　なし
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者　なし
(　　　)