

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540066

研究課題名(和文) 奇数次元球面内の平坦トーラスに関する未解決問題の研究

研究課題名(英文) Studies on some open problems concerning flat tori in odd dimensional spheres

研究代表者

北川 義久 (Kitagawa, Yoshihisa)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：20144917

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元単位球面内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は円周率に等しいであろうという「直径予想」について研究した。2011年、はめ込み写像の平均曲率が「非負または非正」ならば直径予想は正しいという定理を証明したが、その後、証明の一部に深刻な誤りが発見された。本研究では、この誤りを修正するための研究を行い、2次元単位球面上の単純ループの形状に関するある補題を用いることにより、証明の修正に成功した。

研究成果の概要(英文)：Diameter conjecture on flat tori in the unit 3-sphere states that the extrinsic diameter of isometrically immersed flat tori in the unit 3-sphere is equal to  $\pi$ . In 2011, we obtained a theorem which states that the conjecture is true under the assumption that the mean curvature of the immersion is nonnegative or nonpositive. Unfortunately, there was a gap in the proof of a proposition which was a key assertion to prove the theorem. In this research, using a new lemma on the shape of simple loops in the unit 2-sphere, we corrected the proof of the proposition. As a result, we established the theorem.

研究分野：数学(幾何学)

キーワード：微分幾何 部分多様体 平坦トーラス 3次元球面 直径予想 剛性定理 正則閉曲線 2重接触

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究開始までの経緯.

3次元単位球面  $S^3$  内の2次元トーラスは  $S^3$  から誘導されるリーマン計量の曲率が0であるとき  $S^3$  内の平坦トーラスと呼ばれる. 1975年, 「 $S^3$  内の平坦トーラスを分類せよ」という問題が S.T.Yau [8] により提起された. 当時, このようなトーラスの例として, Clifford トーラスや Hopf トーラスが知られているが, これ以外の例があるかどうかは不明であった([7]).

研究代表者は, 1980年代後半,  $S^3$  の群構造と Hopf 写像を用いて, 2次元単位球面  $S^2$  上のある種の閉曲線対( periodic admissible pair と呼ばれる) から  $S^3$  内の平坦トーラスを構成する方法を開発し, この構成法を用いて,  $S^3$  内の平坦トーラスの新しい例を構成した. さらに,  $S^3$  内の平坦トーラスはすべてこの方法で構成できることを示し, Yau が提起した問題を解決した([3]).

これ以後, この構成法を応用した研究成果が数多く得られた. 例えば, 研究代表者は,  $S^3$  内の結び目の Arf 不変量と上記の構成法を用いて, 次の定理を証明した.

定理1 ([4]).  $S^3$  内に等長的に埋め込まれた平坦トーラスは  $S^3$  の対蹠写像で不変である.

さらに, 研究代表者は, 榎本一之氏および J.L.Weiner 氏との共同研究を実施することにより, 定理1の応用として,  $S^3$  内の Clifford トーラスの剛性に関する次の定理を証明した.

定理2 ([2]).  $M$  を  $S^3$  内の Clifford トーラスとし,  $f$  を  $M$  から  $S^3$  への等長埋め込みとすると,  $f$  は  $M$  から  $S^3$  への包含写像と合同である.

以上のように, 上述の構成法の発見以降,  $S^3$  内の平坦トーラスの研究は Lie 群論や結び目理論等との関係を深めながら大きく発展した. また, これらの研究成果は国外の研究者達の注目を集め, 定理1が発表された数年後, Dadok-Sha[1]により, 定理1の別証明が発表された. なお,  $S^3$  内の平坦トーラスに関するこれまでの研究成果については論説[5] にまとめられている.

(2) 研究開始当初の課題.

本研究の開始当初, 上記の定理2における仮定「等長埋め込み」を, より弱い仮定「等長はめ込み」に置き換えることが可能かどうかという興味深い問題が残されていた. この問題は,  $S^3$  内の平坦トーラスの直径に関する予想「 $S^3$  内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は常に円周率に等しい」と密接な関係があり, この予想が肯定的に解決できれば, 「等長はめ込み」という弱

い仮定の下で定理2の結論が得られる([2]). この予想は  $S^2$  上の閉曲線対に関するある種の2重接触問題と同値であり, 2011年, ある条件の下で肯定的に解決された([6]). しかし, 完全解決には至らず, この予想の解決が重要課題として残されていた.

一方, これまでに得られた  $S^3$  内の平坦トーラスに関する諸定理について, その高次元化の問題は, ほとんどが未解決であった. 理由は,  $n$  が3以上の場合,  $(2n-1)$ 次元単位球面内の  $n$ 次元平坦トーラスの完全な構成法が発見されていないからであり,  $(2n-1)$ 次元単位球面内の  $n$ 次元平坦トーラスの構成法の研究も重要課題として残されていた. この課題は, 複素射影空間  $CP^{n-1}$  内のラグランジュ平坦トーラスの構成法の研究と密接に関係している. 実際,  $CP^{n-1}$  内のラグランジュ平坦トーラスの Hopf 写像による逆像は  $S^{2n-1}$  内の  $n$ 次元平坦トーラスであり, 複素射影空間  $CP^{n-1}$  内のラグランジュ平坦トーラスの構成法の研究も重要な研究課題として残されていた.

(3) 参考文献

- [1] J.Dadok, J.Sha, On embedded flat surfaces in  $S^3$ , J. Geometric Analysis 7 (1997), 47-55.
- [2] K.Enomoto, Y.Kitagawa and J.L.Weiner, A rigidity theorem for the Clifford tori in  $S^3$ , Proc.A.M.S.124(1996), 265-268.
- [3] Y.Kitagawa, Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in  $S^3$ , J. Math. Soc. Japan, 40 (1988), 457-476.
- [4] Y.Kitagawa, Embedded flat tori in the unit 3-sphere, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 275-296.
- [5] 北川義久, 3次元球面内の平坦トーラス, 数学, 57巻2号(2005), 113-126.
- [6] Y.Kitagawa and M.Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in  $S^3$ , Geometriae Dedicata, 155 (2011), 105-140.
- [7] M.Spivak, Some left-over problems from classical differential geometry, Proc. Sympos. Pure Math., 27(1975), 245-252.
- [8] S.T.Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math., 97 (1975), 76-100.

2. 研究の目的

前述の二つの課題を解決するため, 研究目的を以下のように設定した.

研究目的 A. 直径予想「 $S^3$  内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は常に円周率に等しい」を解決すること.

研究目的 B.  $CP^n$  内のラグランジュ平坦トーラスの構成法を研究するための準備として,  $CP^2$  内のラグランジュ平坦トーラスの構成法を開発すること.

### 3. 研究の方法

研究目的を達成するため、2名の連携研究者の協力を得て、以下のような研究計画を立てた。

#### 研究計画 A

- (A-1) 直径予想と  $S^2$  上の閉曲線対の2重接触問題の同値性を確認する。
- (A-2) 閉曲線対の変形理論(都合のよい変形が存在することを保証する)を作る。
- (A-3) 上記の変形理論を用いて、2重接触問題を簡単な場合に帰着させ、直径予想を解決する。

#### 研究計画 B

- (B-1)  $CP^2$  内のラグランジュ平坦曲面の構造方程式を確認する。
- (B-2) 上記の偏微分方程式の解を構成する方法を確立する。
- (B-3) 上記の解の2重周期性について研究し、 $CP^2$  内のラグランジュ平坦トーラスを構成する。

研究計画 A を遂行するために、研究代表者は、shell と呼ばれる図形に関する理論に精通している連携研究者(梅原雅顕)と共同研究を実施した。また、研究計画 B を遂行するために、研究代表者は、複素射影空間に値を持つ写像の研究に精通している連携研究者(相原義弘)と共同研究を実施した。

具体的には、各年度に数回、研究代表者と連携研究者によるセミナーを実施し、課題解決のための討論を行った。また、研究代表者は国内で開催される微分幾何学関連の研究集会に参加し、他の研究機関に所属する幾何学者達との交流を深め、研究計画の遂行に必要な情報を収集した。さらに、各年度の後半に、研究代表者と連携研究者は研究打合せを行い、それまでに得られた情報を共有するとともに研究計画を推進するためのアイデアについて検討した。

### 4. 研究成果

「研究開始当初の背景」の項に載せた参考文献[6]の中で、直径予想に関する次の定理が証明されていた。

定理.  $M$  を  $S^3$  内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスとする。もし  $M$  の平均曲率が 0 以上(または 0 以下)であれば、 $M$  の外的直径は円周率 に等しい。

ところが、本研究を遂行中、この定理の証明の主要部分に深刻な誤りが発見された。そのため、証明を修正するための研究を開始した。定理の証明における主要部分とは、 $S^2$  上の閉曲線対に関する2重接触問題が、閉曲線対の測地的曲率に関するある種の条件(定

理の仮定に対応する条件)の下で、解けることを示すことである。文献[6]ではこの証明が不完全であった。しかし、次の命題を用いることにより、証明の修正に成功し、上述の定理が正しいことを示した。

命題.  $L$  を  $S^2$  上の単純ループとし、 $L$  の測地的曲率は正定数  $a$  より大きいとする。もし  $S^2$  上の有向円  $C$  が  $L$  と接触し、 $C$  の測地的曲率が  $a$  であれば、接点以外の  $L$  の点はすべて  $C$  の内部に属する。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Y.Kitagawa and M.Umehara,  
Erratum to: Extrinsic diameter of immersed flat tori in  $S^3$ , *Geometriae Dedicata* 171(2014), 407-412,  
(doi:10.1007/s10711-013-9900-z)

F.Martin, M.Umehara and K.Yamada,  
Flat surfaces in hyperbolic 3-space whose hyperbolic Gauss maps are bounded,  
*Rev. Mat. Iberoam.* 30 (2014), 309-316,  
(doi 10.4171/rmi/779).

S.Ohno, T.Ozawa and M.Umehara,  
Closed planar curves without inflections,  
*Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), 651-665.  
(doi:10.1090/S0002-9939-1991-1043406-7)

北川義久,  
3次元球面内の平坦トーラスに関する直径予想, *数理解析研究所講究録*, 1817(2012), 71-79.

G.Throbergsson and M.Umehara,  
A refinement of Foreman's four vertex theorem and its dual version, *Kyoto J. Math.* 52 (2012), 743-758,  
(doi:10.1215/21562261-1728848)

S.Shiba and M.Umehara,  
The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, *Differential Geometry and its Applications.* 30 (2012), 285-299,  
(doi:10.1016/j.difgeo.2012.04.001)

[学会発表](計8件)

相原義弘,  
Remarks on Cartan's second main theorem for holomorphic curves,  
等角写像論・値分布論合同研究集会, 2015年2月7日, 幕張メッセ会場

北川義久 ,

3次元球面内の平坦トーラスに関する未解決問題,  
数理科学小研究集会, 2015年1月31日, 福島大学国際交流会館

北川義久 ,

$S^3$ 内の平坦トーラスに関する未解決問題 (Flat tori in the unit 3-sphere and related open problems),  
研究集会「部分多様体論・湯沢 2014」, 2014年11月21日, 越後湯沢町・湯沢グランドホテル

M.Umehara ,

Geometry of Surfaces with singularities ,  
Transformations and Singularities ,(Joint Project between Austria (FWF) and Japan (JSPS) ), 2014年9月17日, ウィーン工科大学 (オーストリア)

梅原雅顕 ,

卵形線の縮閉線の形状と特異点,  
福岡大学微分幾何研究会 (Geometry or Something), 2013年11月4日, 福岡大学セミナーハウス

M.Umehara ,

Differential Geometry of surfaces with singularities,  
The 8th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan , 2012年9月10日, 四川大学 (中国)

M.Umehara ,

Differential Geometry of surfaces with singularities ,  
12th International Workshop on Real and Complex Singularities , 2012年7月24日, サンパウロ大学サンカルロス校 (ブラジル)

北川義久 ,

3次元球面内の平坦トーラスに関する直径予想 (Diameter conjecture on flat tori in the unit 3-sphere) ,  
RIMS 研究集会「部分多様体と四元数構造」, 2012年6月26日, 京都大学数理解析研究所

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

北川 義久 (KITAGAWA, Yoshihisa)  
宇都宮大学・教育学部・教授  
研究者番号: 20144917

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

相原 義弘 (AIHARA, Yoshihiro)  
福島大学・人間発達文化学類・教授  
研究者番号: 60175718

梅原 雅顕 (UMEHARA, Masaaki)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号: 90193945