

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540070

研究課題名(和文) 3次元多様体の例外的手術を用いた特殊な4次元多様体の構成

研究課題名(英文) Construction of 4-manifolds related to exceptional surgeries on 3-manifolds

研究代表者

山田 裕一 (YAMADA, YUICHI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：30303019

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：3次元球面内の双曲的結び目(knot)に沿うデーン手術(Dehn surgery)で双曲的ではない3次元多様体が生じる現象は「例外的手術」と呼ばれ、低次元多様体論の研究課題である。本研究は、例外的手術を利用して特殊な性質をもつ4次元多様体を構成できないか、という発想で研究を進めている。主な成果は次の3つ：異なるknotから同じレンズ空間が生じる組についての研究を進めた。Mazur linkに沿う例外的手術の「地理学的考察」を提案した。2000年代(～2010)に登場し急発展した Heegaard Floer homology にも取り組み、研究集会を開催した。

研究成果の概要(英文)：Phenomenon that a Dehn surgery along a hyperbolic knot in the 3-sphere yields a non-hyperbolic manifold is called "exceptional surgery" and is a subject in the topology of low-dimensional manifolds. We are interested in construction of curious 4-manifold of great interest, related to exceptional surgeries. Results are: (1) Study on pairs of distinct knots that yield the same lens spaces. (2) Study on exceptional Dehn surgeries along the Mazur link, and its generalization, from the view point of "geography". (3) Held a workshop "Differential Topology 17", on Heegaard Floer homology. Here, Heegaard Floer (HF) is a new theory, appeared and quickly developed in 2000-2010.

研究分野：数物系科学

キーワード：多様体 4次元多様体 3次元多様体 デーン手術 レンズ空間 枠付き絡み目 カービー計算

1. 研究開始当初の背景

筆者は学生時代から、低次元(つまり3・4次元)のトポロジー、特に手術(surgery)による多様体の変化の研究を続けている。この分野では、結び目(knot)の現象とその多様性が中心的な役割を果たす。

その構想の下で、筆者は「例外的手術(exceptional surgery)」に注目する。これは、結び目が双曲的であってもデーネ手術によって双曲的でない3次元多様体が生じ得る(いわば奇妙な)現象である。この現象を“+1次元”つまり4次元多様体に関連づけるのが筆者独自の研究である。

例外的手術の中でも、特にレンズ空間が生じる場合を「レンズ空間手術」という。研究開始の時点で、筆者は既知のレンズ空間手術の一部のknotが、特異点論のもとでN.A'Campo氏によって定義されたdivide knotとして曲線表示できることを示し、表示の規則性を見出していた。本研究は、その規則性の一般化を目標の1つとしていた。レンズ空間手術を生じる(3種類の、多様な)knot達の構成を分析し、名称を決めたことは、現在に至る研究の核になっている。

一方、研究分野では2000年代(～2010)に登場したHeegaard Floer homology理論(以下、簡便のためHFと表す)が発展して多くの事実が解明された。後述のJ.Greene氏の結果もその1つである。しかし、レンズ空間手術の本来の目標(knotの分類)はまだ解決していない。そこで、筆者は異なるknotから同じレンズ空間が生じる現象に興味を持ち、丹下基生氏(筑波大)と共同研究を開始し、最も簡単な(torus knots)の場合を調べてこの課題の基礎をまとめた。しかし、そこから先こそが例外的手術理論の核心であると感じていた。

2. 研究の目的

低次元多様体論として発展した「例外的手術」の分野に実4次元多様体論の視点から例外的手術の“しくみ”を解明すること、そして、それを利用して特殊な性質を持つ4次元多様体の構成を試みることで、この2つが本研究の研究目的である。

研究期間の前半ではまず、2つの共著論文の仕上げに取り組んだ。丹下氏との共著論文は、異なるknotから同じレンズ空間が生じる現象の追究、門上晃久氏との共同研究はトーション不変量のレンズ空間手術への応用である。個人では、レンズ空間手術の3種類のうち最も稀少な族のdivide knot表示を考察した。この頃、当該分野に大きな展開があった。J.Greene氏の「レンズ空間実現問題(2013): レンズ空間手術で生じるレンズ空間、およびknotのHFは既知のものに限られる」である。HF理論の発展を気かけながらの研究展開となった。

丹下氏との共著論文は望外に反応がよかったので、自信をもって続編に取り組んだ。最初の共著論文はあくまでも基礎固めに過ぎず、例外的手術理論の枠組みでは、続編以降こそが核心である。研究期間を計画より1年間延長した理由は、この論文を完成させて1区切りとする意図があった。

後半には、新たな研究展開があった。2014年11月のK.Baker氏の来日を機に、Mazur link(下図)とその拡張族に沿うレンズ空間手術を考察した。その後、蒲谷祐一氏(当時、数理論)の指摘を受けてMinimally Twisted 4 chain linkに関する結果を利用し、それらの例外的手術をすべて調べて「地理的考察」を提案した。

最終年度には、自らもHF理論に取り組み、changemaker(直訳:両替商)の概念を勉強し、トラス結び目の場合にはディバイド表示と直接的な関係があることを指摘した。

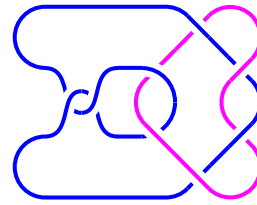


図: the Mazur link

3. 研究の方法

数学では、論文や講演による成果報告と研究集会での研究の情報交換が大切である。

(1) 本研究期間中に、海外の国際研究集会2件に参加した。

2013年に国際研究集会"Geometry and topology of smooth 4-manifolds"(ドイツ Max Planck Institute)。J.Greene氏との意思疎通は特に刺激的だった。

2014年に韓国ソウルで国際数学会議が開催された。筆者は予定通り、サテライト集会(釜山)に参加し、丹下氏との共同研究の成果を講演した。

(2) 海外の研究者4名の講演を含む研究集会「微分トポロジー'17」を本務先(電気通信大)で開催した。丹下基生氏(筑波大)、安部哲哉氏(当時、大阪市立大)との共催。HF理論の多面的な成果の集積・報告を目的とした。本務先での研究集会開催、海外からの研究者の招聘、どちらも初体験で、戸惑いながら任務にあたった。

(3) 日本・韓国・中国で巡回して開催している「East Asian School of Knots and Related Topics」に協力した。2015年度(11th大阪市立大)には招待講演を引き受けた。2016年度(12th東大)には現地世話人を務めた。

(4) 毎年夏に開かれるトポロジーシンポジウム、関西と東京で開かれる結び目論と低次元多様体論の研究集会、広島大あるいは大阪市立大で開催された4次元多様体論の研究集会などに参加して最先端の情報を交換した。

(5) 丹下氏と安部氏が運営している勉強会「ハンドルセミナー」(会場は東工大)にほぼ毎回参加し、自ら講演を5回行った。この地道な活動が、上記(2)の研究集会に繋がっている。

(6) 計算機、ソフトウェアなどIT環境を整備して研究の本質的な部分に集中することができた。出張先で、より効果的な情報交換が可能となった。昨今、幾何の分野でも計算機を利用することが多い。また、幾何学の論文・講演資料として、ソフトウェアを用いて正確でわかりやすい図を描くことは、読者や聴衆の理解を大いに助ける。

(7) 筆者の所属大学は2010年に大きな改組があったが、2016年にも改組が行われた。会計方法の変更、計算機環境の安全性強化などの雑務で研究時間が減った時期があった。それらは研究申請時(2011年)には想定し得ない事情であった。単独研究は後まわしにし、共同研究者には仕事が遅くなって迷惑をかけたが、逆に励まされ、辛うじて研究活動を続けることができた。

4. 研究成果

(1) 2012年度(1年目 初年度)

レンズ空間手術の中で最も稀少な族の divide knot 表示を考察した。論文を執筆・投稿し、秋の数学会(九州大)と東北結び目セミナーで講演した。

丹下基生氏との共著論文が学術誌に掲載された。続編の紹介も含めて研究集会「4次元トポロジー」で講演した。

門上晃久氏(当時、華東師範大学(中国))との共著論文($S^1 \times S^2$ からのレンズ空間手術に Torsion 理論を適用)が掲載内定となった。仕上げ時に新たな工夫ができた。

研究分担者 山口耕平氏は、実射影空間から実(あるいは複素)射影空間への連続写像全体のなす写像空間を(ホモトピー型の意味で)多項式で表現される代数的写像のなす有限次元空間でどれくらい近似できるか(Atiyah-Jones 予想)関連の研究とその応用を研究した。

(2) 2013年度(2年目)

門上氏との共著論文が学術誌に掲載された。最終的な見直しの機会が2回与えられた。

国際研究集会"Geometry and topology of smooth 4-manifolds"(ドイツ Max Planck Institute)に参加して貴重な情報交換を行った。J. Greene 氏との意思疎通は特に刺激的だった。

丹下氏との共著論文((1)の)が掲載誌の Top20 アクセスに挙げた。続編にあたる研究を開始した。

研究分担者 山口氏は、 X が compact toric smooth toric variety のときに、無限次元の写像空間 $\text{Map}(\mathbb{R}P^m, X)$ を代数的写像のなす有限次元空間 $\text{Alg}(\mathbb{R}P^m, X)$ でどの程度までホモトピー型が近似できるかという問題(「ホモトピー型近似問題」と呼ぶ)について、A. Kozłowski 氏(ワルシャワ大学)、大野真裕氏(電気通信大)と共同研究を行った。

(3) 2014年度(3年目)

丹下氏との共同研究果の続編を、海外(釜山)と国内の研究集会「4次元のトポロジー」(大阪市大)で講演した。

Mazur link と Akbulut-Yasui link に沿うレンズ空間手術について、研究集会「多様体のトポロジーの展望」(東大)と「微分トポロジー-15」(京大)で講演した。

丹下氏と安部哲哉氏(当時、東工大)が運営している「ハンドルセミナー」(会場は東工大)にほぼ毎回参加し、講演を3回行った。

丹下氏、安部氏と研究集会「微分トポロジー-15」(京都大)を開催した。3日間で講演数10。

研究分担者 山口氏は、実代数多様体 M, N に対して、多項式で表現される M から N への代数的写像(正則写像)のなす空間 $\text{Alg}(M, N)$ による、対応する連続写像全体のなす無限次元空間 $\text{Map}(M, N)$ のホモトピー型近似問題(Atiyah-Jones-Segal 型予想)を研究した。

(4) 2015年度(4年目 計画は最終年度)

Mazur link と Akbulut-Yasui link について蒲谷祐一氏(当時、数理研)の指摘を完遂した: Minimally Twisted 4 chain link に関する結果を利用して例外的手術をすべて分類し、「地理的考察」を提案した。この成果を国際集会(開催地は阪市大)の招待講演で講演した他、学習院大、研究集会「4次元トポロジー」、「瀬戸内結び目セミナー」で講演した。

これまでの研究全体の survey をトポロジー-火曜セミナー(東大数理)で講演した。

丹下氏、安部氏と研究集会「微分トポロジー-16」(筑波大)を開催した。3日間で講演数10。

丹下氏が運営している「ハンドルセミナー」に毎回参加し、講演を1回行った。

研究分担者 山口氏は、複素多様体 M から N への連続写像全体のなす無現次元の写像空間 $\text{Map}(M, N)$ の、多項式で表現される代数的写像のなす有限次元部分空間 $\text{Hol}(M, N)$ によるホモトピー型近似問題について、研究を継続した。

(5) 2016年度(5年目 期間延長による最終年度)

レンズ空間手術に役立つ changemaker (直訳:両替商)の概念を解説し、トーラス結び目の場合にはディバイド表示と直接的な関係がある、との指摘を「瀬戸内結び目セミナー」で講演した。

日本・韓国・中国で巡回して開催している「The 12th East Asian School of Knots and Related Topics」(東大)の現地世話人を務めた。

丹下氏が運営している「ハンドルセミナー」に毎回参加し、自らも講演を1回行った。

丹下氏、安部氏と研究集会「微分トポロジー'17」(電気通信大)を開催した。4日間で講演数17。初日のみ日本語による勉強会。海外からの講演者が4名。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

1. A. Kozłowski, M. Ohno and K. Yamaguchi, 査読 有, Spaces of algebraic maps from real projective spaces to toric varieties, J. Math. Soc. Japan 68-2 (2016), 745-771.
DOI:10.2969/jmsj/06820745
2. Teruhisa KADOKAMI and Yuichi YAMADA, 査読 有, Lens space surgeries along certain 2-component links related with Park's rational blow down, and Reidemeister torsion, J. of Australian Math. Soc. 96 no.1 (2014), 78-126.
<https://doi.org/10.1017/S1446788713000372>
3. Kozłowski and K. Yamaguchi, 査読 有, Simplicial resolutions and a spaces of algebraic maps between real projective spaces, Topology and its Applications 160 no.1 (2013), 87-98.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2012.09.019>

4. Motoo TANGE and Yuichi YAMADA, 査読 有, Four-dimensional manifolds constructed by lens space surgeries along torus knots, Journal of Knot Theory and its Ramifications 21-11(2012), 12501-1-65.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216>

[512501118](https://doi.org/10.1142/S0218216512501118)

注:日本数学会の講演アブストラクト(2件、査読 無)については下記(6,14)を参照。

〔学会発表〕(計14件)

1. 山田裕一,
Change maker とトーラス結び目のレンズ空間手術, 研究集会「瀬戸内結び目セミナー」, 大島商船高専(山口県大島郡周防大島町), 2016年9月3日.
2. Yuichi YAMADA,
Dehn surgery along the Mazur link and Akbulut-Yasui links, [招待講演]
The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 大阪市立大学(大阪市住吉区), 2016年1月28日.
3. 山田裕一,
レンズ空間手術と4次元多様体の Kirby calculus, トポロジー火曜セミナー,
東京大学大学院 数理科学研究科(東京都目黒区駒場), 2015年12月8日.
4. 山田裕一,
Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link, 学習院大学トポロジーセミナー, 学習院大学(東京都豊島区目白), 2015年12月4日.
5. 山田裕一,
Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link and its generalization,
研究集会「4次元トポロジー」,
大阪市立大学(大阪市住吉区杉本), 2015年11月22日.
6. 山田裕一,
(丹下基生氏(筑波大学)との共同研究),
Four dimensional manifolds constructed by lens space surgeries,
日本数学会, 秋季総合分科会,
京都産業大学(京都市北区上賀茂本山), 2015年9月13日.
7. 山田裕一,
Dehn surgery along on a certain family of two component links,

研究集会「瀬戸内結び目セミナー」,
大島商船高専(山口県大島郡
周防大島町), 2015年9月5日.

8. 山田裕一,
デーン手術と4次元多様体,
研究集会「微分トポロジー15
~微分トポロジーの過去・現在・未来~」,
京都大学(京都市左京区北白川),
2015年3月25日.

9. 山田裕一,
Divide link に沿う lens space surgery
と4次元多様体, 研究集会「多様体の
トポロジーの展望」, 東京大学(東京都
目黒区駒場), 2014年11月30日.

10. 山田裕一,
(丹下基生 氏(筑波大学)との共同研究),
レンズ空間手術の組から構成する4次元
多様体, 研究集会「4次元トポロジー」,
大阪市立大学(大阪市住吉区杉本),
2014年11月22日.

11. Yuichi YAMADA,
(joint work with Motoo Tange),
Embeddings of lens spaces in $2\mathbb{C}P^2$
constructed from lens space surgeries,
Knots and Low Dimensional Manifolds:
a Satellite Conference of Seoul ICM 2014,
Busan(KOREA), 2014年8月25日.

12. 山田裕一,
(丹下基生 氏(筑波大学)との共同研究),
4-manifolds constructed by lens space
surgeries, 研究集会「4次元トポロジ
ー」, 広島大学(東広島市鏡山),
2012年11月15日.

13. 山田裕一,
Divide knot presentations of sporadic
knots of Berge's lens space surgery,
研究集会「東北結び目セミナー 2012」,
山形大学(山形市小白川町),
2012年10月13日.

14. 山田裕一,
Divide knot presentations of sporadic
knots of Berge's lens space surgery,
日本数学会 秋季総合分科会, 九州大学
(福岡市西区元岡), 2012年9月20日.

〔図書〕(計1件)

1. ユニーク・エキサイティングサイエン
スIII, 近代科学社, 監修: 福田喬・
田中繁, p.7-31 (第1章).

〔産業財産権〕ありません.
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.yyamada.e-one.uec.ac.jp/index
j.html](http://www.yyamada.e-one.uec.ac.jp/index.j.html) (2015年1月に移行)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 裕一 (YAMADA YUICHI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・
教授

研究者番号: 30303019

(2) 研究分担者

山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・
教授

研究者番号: 00175655

(3) 連携研究者

丹下 基生 (TANGE MOTOO)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号: 70452422

安部 哲哉 (ABE TETSUYA)

大阪市立大学・数学研究所・特任准教授

研究者番号: 00614009

(4) 研究協力者 ありません.

以上