3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ９ 月 ２０ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００７２
研究課題名（和文）リーマン多様体のコンパクト化とグラフの埋め込み

研究課題名（英文）Compactification of Riemannian manifolds and embeddings of graphs

研究代表者
加須栄　篤（Kasue, Atsushi）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：４０１５２６５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：　非放物的ネットワークの倉持境界に関する研究である。まず、ネットワークのランダムウォークはほとんど確かに倉持境界に値を持つ確率変数に収束し、その像測度が調和測度を与える。これを通して調和関数のディリクレ問題およびノイマン問題の核関数表現が可能となる。また、双曲空間に埋め込まれた有限グラフを考察し、双曲空間の幾何学的コンパクト化をもとに、埋め込まれたグラフのチーガー定数、スペクトルギャップなどをグラフの大きさによる評価を与える。さらに、p－ネットワークを含むより一般的な抵抗関数を備えたネットワーク、モジュラー列空間を枠組みとするネットワークのポテンシャル論の体系的な基礎研究を行う。

研究成果の概要（英文）：　We study a connected nonparabolic, or transient network compactified with the Kuramochi boundary, and show that the random walk converges almost surely to a random variable valued in the harmonic boundary, and a function of finite Dirichlet energy converges along the random walk to a random variable almost surely and in L2. We also give integral representations of solutions of Poisson equations on the Kuramochi compactification. We also study finite connected graphs which admit quasi monomorphisms to hyperbolic spaces and give geometric bounds for the Cheeger constants in terms of the volume, an upper bound of the degree, and the quasi monomorphism. Moreover we develop a potential theory of nonlinear networks in the frame work of modular sequence spaces.

研究分野：数物科学系

キーワード：リーマン多様体　ネットワーク　理想境界　ディリクレ形式　ディリクレエネルギー有限写像　ランダムウォーク　スペクトルギャップ　双曲埋め込み

１．研究開始当初の背景

(１)有界幾何を持つリーマン多様体とその有界次数ネットは自然に擬等長である。このことから、p－ディリクレエネルギー有限な関数空間を視点にしてそれらの相互関係を研究し、擬等長不変性、擬等長不変量を明らかにすることが重要な課題である。

(２)無限グラフにおいて、各辺に抵抗器（関数）を与えて、抵抗ネットワークが得られる。後に述べる研究成果(１)のように、抵抗が線形に作用する線形ネットワーク、すなわち抵抗関数が１次関数のネットワークを考えることが多い。しかし研究成果(２)、(３)のように指数 p-1 のベキ関数(p>1)を抵抗関数とする場合も非常に重要で、研究すべき対象である。p が２以外の場合は扱うラプラシアンは非線形作用素であり、解析的に難しい状況となる。p－ネットワークを含むより一般的な抵抗関数を備えたネットワーク、モジュラー列空間を枠組みとするネットワークも１９９０年代に導入されたが、初期の研究からほとんど進展しない状況であった。

２．研究の目的

(１)アダマール多様体やその擬等長ネットを考え、p - ディリクレ有限 p - 調和関数と幾何学コンパクト化との相互作用の研究とグラフの埋め込み問題の研究を展開する。

(２)ｐ－ネットワークを含むより一般的な抵抗関数を備えたネットワーク、モジュラー列空間を枠組みとするネットワークのポテンシャル論の体系的な基礎研究を行う。

３．研究の方法

(1)アダマール多様体の p - ディリクレエネルギーに着目したフロイドタイプのコンパクト化の構成とそれに対する考察、無限グラフと有限部分グラフの p - ディリクレエネルギーに関する合成抵抗の評価、双曲幾何と有限グラフの p－レジスター評価など、幾何的視点からのアプローチを有効に行う。

(2)抵抗関数の凸性に着眼点を置き、抵抗関数の一般性から生じる困難を克服する。

４．研究成果

(１)非放物的線形ネットワークの倉持境界を研究する。ネットワークのランダムウォークはほとんど確かに倉持境界の調和境界部に値を持つ確率変数に収束し、ディリクレエネルギー有限な関数は、ランダムウォークに沿って調和境界上の L2 関数に概収束かつ L2 収束することを明らかにする。ランダムウォークによる調和境界上の像測度が調和測度を与える。これを通して調和関数のディリクレ問題およびノイマン問題の核関数表現が可能となる。

(２) 無限ネットワークのエネルギーとして、指数 p のディリクレエネルギーを考え、これに関する倉持コンパクト化を考察する。p - 倉持コンパクト化は距離付け可能なコンパクト化であり、うまく距離を選ぶと、グラフ距離を持つグラフからその p－倉持コンパクト化への恒等写像は p－エネルギー有限であることが従い、この距離に関するリプシッツ連続関数はすべて p－エネルギー有限な関数となる。このことは、倉持コンパクト化の幾何的手法によるアプローチを可能にすると思われる。とくに双曲空間に埋め込まれている無限グラフの場合には、双曲空間の幾何的理想境界への集積点から得られる理想境界との関係が重要であり、この状況での重要な結論が得られる。具体的にはｎ次元双曲空間に埋め込まれている無限グラフが、n-1 を超える指数 p に対して p - 非放物的であるならば、p－倉持境界の調和部分は、双曲空間の幾何的理想境界への集積点集合またはそれ以上の大きさを持ち、とくに正の容量を持つことから p－エネルギー有限な p - 調和関数も豊富に許容することが明らかとなる。

(３)双曲空間を近似する単純ネット（無限グラフ）において、幾何的理想境界に着目し、指数 p の有効抵抗とグラフ距離の関係する評価式を示す。これを用いて、双曲空間に埋め込み実現できる有限グラフを考察し、等周定数、ラプラシアンのすべての固有値の上からの評価を与える。特に、双曲空間に埋め込み実現できる有限グラフにおいて、任意の指数に関してもスペクトルギャップが生じないことが明らかになる。

(４)モジュラー列空間を枠組みとするネットワークの体系的な基礎研究を行う。その成果の前半部分は下記論文①において発表している。体系的研究である。

①トムソンの原理

チェイン空間、コチェイン空間、フロー、カレントの概念を明確化し、変分原理に基づいて、フローからカレントを取り出す。カレントは、コチェインによって表現され、ポテンシャル関数との対応ができる。この対応において、エネルギー有限な、ネットワークに付随した調和関数（以下簡単に調和関数という）が現れる。一つの〝外力〟（0－チェイン）によって生成されるカレント全体とエネルギー有限な調和関数の集合（線形空間ではない）が１対１に対応する。定数関数は特別な調和関数であるが、これに対応するカレントが最小カレントである。したがってとくに生成されるカレ

ントの一意性と上記調和関数の集合は定数のみからなるという性質は同等であることが明らかとなる。
　また、大域的なカレントはすべて　有限部分ネットワーク上のカレントによって近似できることを示す。これは線形ネットワークにおいて、ある種の条件を満たすカレントの場合に証明されていた事実を、一般的な非線形ネットワークの枠組みで、かつカレントの条件なしで成立することを示したものである。

②ロイデン分解の一般化と精密化
　エネルギー有限な関数は調和関数とポテンシャル関数に分解する。さらに制約付きの下で同じく分解することができる。分解には線形性はない。

③フローおよびカレント空間の解析
　“外力”（0－チェイン）で生成されるカレントが存在するための必要かつ十分条件を与える。また無限遠方でエネルギー最小性を満たすカレント、無限遠方で〝ノイマン境界条件”を満たす調和関数が表すカレント、が存在するための必要かつ十分条件を明示する。バランス条件が要求されている。これは、線形ネットワークでも考察されたことのない事実の発見である。

④ネットワークの放物性･非放物性に関する諸性質の確立
　非放物的であること、無限遠方に発散する道の集合の極値的長さが有界であること、非定数正値優調和関数が存在すること、定数１は台が有限な関数ではエネルギー近似できないこと、などは、それぞれ同値な命題であることを示す。一つの点から無限遠点までの極値的長さが一様に有界であるという性質、２点間の極値的長さが一様に有界であるという性質などと関数空間との関係、フローの存在との関係を提案する。

⑤ロイデンおよび倉持コンパクト化の導入と基本的性質の確立、
　エネルギー有限な関数は、ほとんどの無限遠方に発散する道に沿って有限な値に収束することを証明する。このような関数の無限遠方の挙動に注目して、ロイデン境界および倉持境界という２つの理想境界を導入し、基本的性質とともに、次のような関数の比較原理を確立する。
『エネルギー有限な関数Ｆのロイデン境界での値とその非線形ラプラシアンの値が、エネルギー有限な関数Ｇのロイデン境界での値とその非線形ラプラシアンの値それぞれに上から抑えられているとき、関数の値自身が同じく評価される､すなわちＦ はＧを超えない関数である』

⑥ネットワーク射とレイリ－の単調性法則の明確化とその応用、
　Soardi に従って､非線形ネットワーク間のネットワーク射を導入する。ネットワーク射は、レジスタンス関数を除けば、グラフ間の準同型である。このネットワーク射は、カレントをカレントに写し、エネルギーを縮小する。これがレイリ－の単調性法則と呼ばれる基本法則を表現している。極値的長さに適用すると、その長さの縮小性として表現されることを確立する。

⑦非線形ラプラス作用素と解（調和関数）の存在および非存在の例示
　エネルギー有限な調和関数の存在・非存在の問題は、非線形ネットワークのポテンシャル論的中心課題の一つである。従ってこれに関する様々な例を構成することは、きわめて重要である。直積の一般化として、ねじれ積を新しく導入し、エネルギー有限な調和関数の豊富に存在する例を提示する。また、双曲空間に埋め込まれたグラフ、あるいは平面グラフのすでに知られた例をもとにレイリ－の単調性法則を根拠にエネルギー有限な調和関数の豊富に存在する例を提示する。

⑧ディリクレ問題
　エネルギー有限な関数族に付随して現れるすべての理想境界に対して、調和関数に関するディリクレ境界値問題がペロン法によって可解であることを証明する。すなわち連続関数に対して、それを境界値にもつ調和関数が一意的に存在することを示す。ロイデン境界、倉持境界などが重要である。また、倉持境界は距離付け可能な理想境界であり、任意のエネルギー有限関数は擬連続関数として境界まで伸びるという性質を持つことを確定する。倉持境界へのトレースの存在である。この意味で倉持境界はエネルギー有限な関数空間を表現していると考えることができる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① A. Kasue, A. Thomson's principle and a Rayleigh's monotonicity law on nonlinear networks, 査読有, Potential Anal. (2016) doi:10.1007/s11118-016-9562-1

② T. Hattori and A. Kasue, Expansion constants and hyperbolic embeddings of finite graphs, 査読有, Mathematika 61 (2015), 1-13.

③ A.Kasue, Random walks and Kuramochi boundaries of infinite networks, 査読有 Osaka J. Math., 50 (2013), 31-51.

④ T. Hattori and A. Kasue, Functions with finite Dirichlet sum of order p and quasi-monomorphisms of infinite

graphs， 査読有，Nagoya Math. J. 207 (2012)，95-138.

〔学会発表〕（計４ 件）

① Kuramochi boundaries of transient networks， Topics in Differential Geometry and its discretizations， WPI-AIMR，東北大学，2015.1.10
② グラフの埋め込みとレイリーの単調性法則、2012 年度日本数学会秋季分科会幾何学分科会特別講演，九州大学 2012.9.20
③ 無限ネットワーク上のランダムウォークと倉持境界、第 55 回函数論シンポジウム 金沢、2012.11.24
④ Function with finite Dirichlet sum of order p and quasi-monomorphisms of infinite graphs、RIMS meeting: Potential Theory and its Related Fields，Kyoto，2012.9.3

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）
〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
加須栄 篤（Kasue，Atsushi）
金沢大学・理工研究域・教授
研究者番号：40152657

(2)研究分担者
服部 多恵（Hattori，Tae）
石川工業高等専門学校・一般教育・講師
研究者番号：40569365