様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2017
課題番号：２４５４００７４

研究課題名（和文）結び目と絡み目のコンコルダンス不変量の幾何学

研究課題名（英文）Geometry on concordance invariants of knots and links

研究代表者
川村　友美（Kawamura, Tomomi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：４０３４８４６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：　結び目または絡み目とは３次元空間内の閉じた紐のことである。結び目不変量または絡み目不変量とは、結び目または絡み目の複雑さを数値などで表したもので数多く構成されている。
　本研究では、プレッツェル結び目と呼ばれる結び目についてある条件付きで、ラスムッセン不変量やオジュバットとサボーの不変量の値を決定した。また結び目の種数という不変量を求めやすくする「射影図上の橋の架け替え」が、絡み目のオイラー数という不変量についても有効であることも確かめた。

研究成果の概要（英文）：A knot or link is a closed curve or its copies in the 3-dimensional space. An invariant of a knot or link is the number or something representing how complex it is. Many invariants have been constructed.
In this research, we determine the Rasmussen invariant and the Ozsvath-Szabo invariant for certain pretzel knots. Furthermore we show a bridge-replacing move induced on knot diagrams is as useful in computing the Euler characteristic of a link, a kind of link invariants, as the genus of a knot, a kind of knot invariants.

研究分野：結び目理論と低次元トポロジー

キーワード：結び目と絡み目　結び目と絡み目の射影図　ラスムッセン不変量　オジュバットとサボーの結び目不変量　プレッツェル結び目　ザイフェルト曲面　種数あるいはオイラー数　橋の架け替え

１．研究開始当初の背景

（１）結び目理論は幾何学の一分野に位置づけられ、それぞれの結び目の複雑さを数値や多項式などで表した結び目不変量は数多く導入され研究されてきた。ここで結び目は３次元空間内の閉じた紐で、平行移動、回転移動、伸縮、あやとりなどのように連続的に変形できるもの同士は同一視している。結び目不変量の一例として結び目解消数は、結び目の交差（紐の重なり）の上下を何回交換すればほどけるかというもので、易しそうな定義であるが、一般的な決定方法は見つかっていない。しかし、結び目解消数を４次元トポロジーと関連させることで多くのことが解明されてきた。その際注目されたのが、コンコルダンス不変量と総称される結び目不変量たちである。コンコルダンスとは、結び目の４次元トポロジー的なある性質であるが、詳細はここでは割愛する。

（２）研究開始当初に国内外で発展が著しかった結び目不変量として、結び目フレアーホモロジーやホバノフホモロジーといったコホモロジー型不変量が挙がる。コホモロジー型不変量は結び目を数値や多項式よりも複雑な代数的な対象で表したものである。これらの派生として構成されたコンコルダンス不変量はとくに注目度が高かった。前者からのはオジュバットとサボーの結び目不変量、後者からのはラスムッセン不変量と呼ばれている。両者はいずれも整数値であり、かつ前述の結び目解消数の下限、すなわち交差の上下を何回交換しないとほどけないかの情報も与えていることが知られている。なお研究開始当時、ホバノフはコバノフと日本語表記されることが多かったが、近年はホバノフの表記が定着しているようである。オジュバットとサボーもそれぞれオズバスとザボーと日本語表記されることもある。

（３）研究代表者自身も本研究開始までにラスムッセン不変量およびオジュバットとサボーの結び目不変量に関する研究成果を既に得ており、同時にベネカン不等式という重要な関係式の精密化を与えていた。ベネカン不等式とは、結び目が空間内に張る膜（ザイフェルト曲面）の複雑さを、結び目射影図の交差の個数と「うずまき」の個数に関係付けたもので、接触幾何という分野の発祥として説明されることが多いものである。ここで結び目射影図とは簡単に述べると、結び目を上から見た図のことである。得られていた研究成果は、これらの不変量について、先行して他の国外研究者たちによって示されていたベネカン型評価式を、精密化したものである。じつはラスムッセン不変量に関しては、ほぼ同時期にロブによっても同様の結果が示されたが、そういった競争が起こるほどに盛んな研究分野である。

２．研究の目的

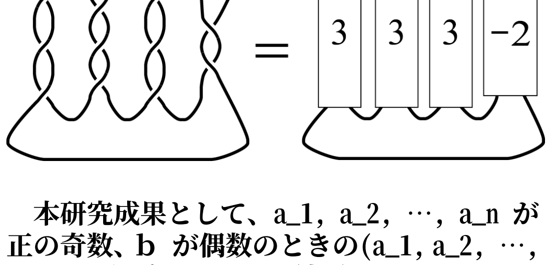
結び目のコンコルダンス不変量と、結び目解消数などの古典的な不変量との関係を、今まで以上に明らかにしていく。とくにオジュバットとサボーの結び目不変量やラスムッセン不変量といった歴史の浅い不変量の性質を分析し、それらの決定公式もしくはより精度の高い評価式の存在を探る。なお、複数個の結び目からなる図形は絡み目と呼ばれているが、本研究は絡み目についての議論も同時に成り立たせるものを目指している。

３．研究の方法

オジュバットとサボーの結び目不変量やラスムッセン不変量などの結び目や絡み目のコンコルダンス不変量と、結び目解消数などの古典的な結び目不変量や絡み目不変量との関係を解明するために、これまでの国内外の関連研究を入念に調査した。そのための幅広い低次元トポロジーの研究情報を、結び目フレアーホモロジー理論やホバノフホモロジー理論を中心に論文や書籍などの文献を収集し、インターネットおよび直接対面による国内外の関連研究者との討論を行いながら、得られた研究情報を分析し、それをもとに新たな理論展開を試みてきた。

４．研究成果

（１）ある性質をみたす結び目に限定して、オジュバットとサボーの結び目不変量およびラスムッセン不変量の決定公式を得た。適用対象の結び目は、プレッツェル結び目と呼ばれるもののうち、ある条件をみたすものとしている。下図はその例であり、(3,3,3,-2)型プレッツェル結び目と呼ばれる。(3,3,3,2)型の場合は「-2」に当たる二つの交差の上下が逆になる。



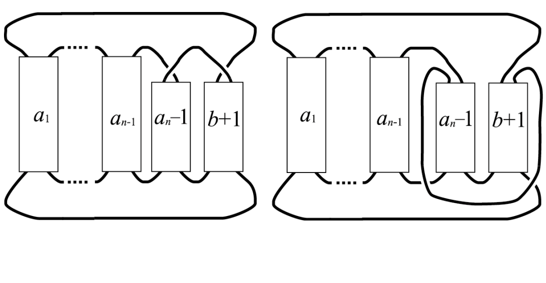
本研究成果として、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が正の奇数、b が偶数のときの$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$型プレッツェル結び目について、オジュバットとサボーの結び目不変量の1/2倍およびラスムッセン不変量の値を次のように求めた。ただし $A=a_1+\cdots+a_n$ とする。
①n=1 のときは$(2,a_1+b)$型トーラス結び目

に一致し、a_1 + b が正のときの求める値は a_1 + b – 1 となり、負のときは a_1 + b + 1 となる。
②n が 2 以上の偶数のとき、b が負の数でなければ求める値は A – n となり、b が負ならば A – n + 2 となる。
③n が 3 以上の奇数のとき、b が負の数でなければ求める値は A + b – n となり、b が負ならば A + b – n + 2 となる。

また不変量たちの既知の関係式により、(a_1, a_2, …, a_n, b)型プレッツェル結び目の結び目解消数はそれぞれこの値の 1/2 倍を下回らないこともわかるが、結び目解消数の決定は n=1 のときを除いて保留中の課題となっている。

上記は限られた条件下での公式であり、プレッツェル結び目の不変量の計算例は既に多くの研究者に挙げられ、具体的かつ有名な結び目について不変量の新たな決定ができたかも不明である。しかし、本研究成果のインパクトは以下の理由で小さくはないはずである。本成果の対象となった結び目には、原と山本が 2012 年の論文で挙げたジョーンズ多項式が一致する可算無限個のペアも含まれ、各ペアについてのオジュバットとサボーの結び目不変量あるいはラスムッセン不変量の値は互いに異なるものとなった。なお、ジョーンズ多項式もラスムッセン不変量も、ホバノフホモロジーに情報が含まれることが知られている。その一方の多項式不変量で区別できずに他方の整数値不変量で区別ができるペアとして、興味深い例が得られた。ホバノフホモロジーそのものを求めずしてその不一致が示せたことにもなる。

この成果は、ラスムッセン不変量およびオジュバットとサボーの結び目不変量のベネカン型評価式を精密化したものを適用して得られたもので、公表は学会発表のみで論文未発表だった精密化に関する部分も合わせて、論文としてまとめて発表した。それが「5. 主な発表論文等」に記載の雑誌論文である。この評価式を適用するのに最適な射影図は、必ずしも標準的なプレッツェル結び目の射影図ではなく、下図の左から右のような変形を考える必要があった。これは a_i の符号が揃わない場合の議論の困難さを示唆している。また、結び目の鏡像に関するこれらの不変量の歪対称性も適用している。この性質が結び目に限られることも、他のプレッツェル絡み目や一般の絡み目への議論の拡張を難しくしている。これらの解明は、各種結び目不変量における今後の課題の一つである。



（2）結び目が空間内に張る膜、すなわちザイフェルト曲面の複雑さを数値化したものとして種数という古典的な不変量がある。これを結び目射影図から直接評価する試みも多くの研究者たちが長年に渡ってなされてきた。そのひとつとして、射影図を種数評価により適したものに変形させるアルゴリズムが、大黒と境と高瀬によって 2012 年の論文で発表された。詳細は割愛するが、彼らはその変形を「橋の架け替え」と名付けた。その議論の絡み目への拡張を、研究代表者が指導した佐藤晶彦の修士論文の改良を兼ねて示し、成果をまとめた。その際、種数の代わりにそれに類似したオイラー数という不変量について議論した。なぜならば膜の連結性を問わずに済むからである。結び目に限れば種数とオイラー数は本質的には同値な概念である。なお、現時点では論文は投稿中である。

橋の架け替えは、結び目や絡み目自体は変えないままで、射影図から起こしやすいザイフェルト曲面の複雑さを増やさずに減らせる変形である。本研究の議論も大黒と境と高瀬に従い、絡み目の射影図をガウス図式に変換して考察している。ここでガウス図式とは、結び目や絡み目のある種の設計図で、紐そのものにどの点同士をどのように上下を決めて交差させるかを矢印でつないで図示したものである。ストイメノフらは 2002 年の論文で、ガウス図式の描線をテープ状に変えたものと、元の結び目や絡み目の張る膜との関係について論じている。その性質がここでは重要な役割を担っている。

橋の架け替えは比較的新しい概念であり、その位置づけや議論の応用は今後の課題として研究する余地が大いにある。「4. 研究成果（1）」で二つ目の図で挙げたプレッツェル結び目の射影図の変形は、橋の架け替えとは異なるがよく似たものであり、潜在的な影響を受けた可能性も否めない。また、オジュバットとサボーの結び目不変量およびラスムッセン不変量は 3 次元空間内や 4 次元空間内の膜の種数の下限の情報も与えることが知られている。本研究課題の関連として橋の架け替えに着手したのは、前述の不変量決定の一般化を目指すヒントを期待したからである。現時点ではそのための具体的な方針は残念ながら見つかっていないが、他の不変量の射影図による評価についても含めて、橋の架け替えの議論の今後の発展が期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1 件）

①Tomomi Kawamura、An estimate of the

Rasmussen invariant for links and the determination for certain links、Topology and its Applications、査読有、196 巻、2015、pp. 558-574
DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.034

〔学会発表〕（計　１件）
① Tomomi Kawamura、An estimate of the Rasmussen invariant for links and the determination for certain links 、International Conference of Topology and Geometry 2013, Joint with the 6-th Japan-Mexico Topology Symposium、2013

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

プレプリント
① Tomomi Kawamura 、 Akihiko Satoh 、 Bridge-replacing moves on links、 投稿中

６．研究組織
(1)研究代表者
川村　友美（KAWAMURA, Tomomi）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：40348462

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　　）