

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540080

研究課題名(和文) リッチ・ソリトンの部分多様体論に基づいた研究

研究課題名(英文) Research of Ricci soliton in terms of Submanifold theory

研究代表者

木村 真琴 (Kimura, Makoto)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：30186332

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：微分幾何学において、曲面や部分多様体のガウス写像は、その幾何学的性質を調べるうえで基本的に重要である。球面内の向きつけられた超曲面については、1997年にB.Palmerが、ユークリッド空間の向きつけられた2次元部分空間のなす、実グラスマン多様体へのガウス写像を考察し、その像が実グラスマン多様体の自然なケーラー構造に関してラグランジュ部分多様体であることをしめした。本研究では、正則断面曲率が一定である、複素射影空間内の実超曲面に対して、複素ユークリッド空間の複素2次元部分空間のなす、複素グラスマン多様体へのガウス写像を構成し、ホップ超曲面の場合にはその像がケーラー部分多様体となることを示した。

研究成果の概要(英文)：In differential geometry, Gauss map is very important to study geometric structure of surfaces and submanifolds. We define a Gauss map from real hypersurface in complex projective space to oriented complex 2-plane Grassmannian. We showed that if a real hypersurface is not Hopf, then the Gauss map is an immersion. If a real hypersurface is Hopf, then the image under the Gauss map is a Kahler submanifold and the Hopf hypersurface is the total space of a circle bundle over Kahler manifold.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ガウス写像 実超曲面 四元数ケーラー構造 ホップ超曲面 Austere 部分多様体

1. 研究開始当初の背景

Richard Hamilton (J. Diff. Geom. 1982) によって創始された Ricci flow は、その後 Perelman による Poincare 予想の解決や、Brendle-Schoen による微分可能球面定理の証明(J. Amer. Math.Soc. 2009) など、微分幾何学のみならず数学において重要な役割を果たしてきた。Ricci flow の研究を進める上で、Hamilton は Ricci soliton が重要な対象であることを見出し、以降その研究が精力的に行われている。Ricci soliton の方程式は、Ricci テンソルが計量に比例する Einstein 方程式に、Riemann 多様体上のベクトル場 V による計量の Lie 微分の項を加えたものなので、Ricci soliton は Einstein 計量の一つの一般化と考えられる。一方で、微分幾何学において部分多様体論は様々な興味深い幾何学的対象をもたらしてきて、Einstein 計量の一般化についても、永年に渡って研究されてきた。本研究において、Ricci soliton を部分多様体論の手法等により構成し、その構造を調べていきたい。

2. 研究の目的

1. Ricci soliton を部分多様体の微分幾何学的観点から考察し、2. 様々な具体的な条件の下でその存在性や性質を調べる事と共に、3. 定曲率空間内の austere 超曲面と複素 Euclid 空間内の特殊 Lagrange 錐、4. 複素空間形内の全測地的全実部分多様体によって葉層化された極小 Lagrange 部分多様体、5. Hermite 対称空間内の Lagrange 部分多様体の基本定理、6. 複素空間形内の Hopf 主曲率が消える実超曲面や、主曲率が一定の実超曲面など、微分幾何学における重要な研究対象についても、従来から研究代表者が行ってきた研究を発展させる。

3. 研究の方法

(i) Ricci soliton を部分多様体論の観点から、及び局所共形 Kähler 多様体の場合にその存在、構成法を調べる。(ii) ファイバー束を用いて、Hermite 対称空間内の部分多様体で、全測地的部分多様体によって葉層化されたものが、Lagrange 部分多様体、さらに極小部分多様体になるための条件を考察する。(iii) Hermite 対称空間内の曲線、曲面や Lagrange 部分多様体の基本定理を、E.Cartan の定理を基に示していく。以上の研究を遂行するために、コンピュータを導入し、インターネットを介して共同研究者達と研究連絡を取ると共に、共同研究者と相互訪問、及び研究集会を通して当研究を進める。

4. 研究成果

(1) 部分多様体に関する微分幾何学において、ガウス写像は曲面や部分多様体の幾何学的構造を調べる上で基本的に重要な概念であって、その対象に応じて様々なガウス写像が研究されてきた。その1つとして、1997年

に B. Palmer は、球面内の向きつけられた超曲面に対して、その超曲面の位置ベクトルと単位法線ベクトルで張られる、ユークリッド空間内の向きつけられた2次元部分空間を対応させることにより、球面内の超曲面から実グラスマン多様体へのガウス写像を定義し、その像は自然なケーラー構造に関して、ラグランジュ部分多様体であることを示した。この結果は、近年ラグランジュ部分多様体の研究において重要な役割を果たしている。本研究では、この Palmer のガウス写像を、複素射影空間、および複素双曲空間内の実超曲面について一般化した。

(2) (正則断面曲率が4の)複素射影空間内の実超曲面で、単位法線ベクトルに複素構造を施すことによって得られる、実超曲面上の構造ベクトル場が主曲率ベクトル、すなわち形作用素の固有ベクトルであるときに、ホップ超曲面とよばれる。その構造は、1982年に Cecil-Ryan によって研究された。複素部分多様体上の半径一定のチューブはホップ超曲面である。逆に、複素射影空間内のホップ超曲面は、その構造ベクトル場に対応する(一定な)主曲率を $2\cot 2r$ とするとき、実超曲面を r だけ単位法線ベクトル方向に「平行移動」したときの、写像(フォーカル写像という)の階数が一定であるとき、その像は複素部分多様体であって、ホップ超曲面は複素部分多様体上の半径一定のチューブ上にあることがわかる。しかし、そのフォーカル写像の階数が一定でないときには、その構造定理は部分的なものしか得られていなかった。さらに、複素射影空間内の等質実超曲面は高木亮一によって分類されていて、すべて階数2のエルミート対称空間のイソトロピー表現の軌道として得られることが知られているが、それらはすべてホップである。

本研究では、複素射影空間内の実超曲面に対して、その位置ベクトルと単位法線ベクトルで張られる、複素ユークリッド空間内の複素2次元部分空間を対応させることにより、実超曲面から複素2平面のなす複素グラスマン多様体へのガウス写像を定義した。そして、実超曲面がホップでない時には、ガウス写像がはめ込みである一方で、実超曲面がホップであるときには、そのガウス写像は構造ベクトル場の積分曲線上では一定であって、その像は、複素2平面グラスマン多様体の四元数ケーラー構造に関して全複素部分多様体であることを示した。その結果として、複素射影空間内のホップ超曲面は、ケーラー多様体上の円束の全空間であって、その射影は今回の研究で構成したガウス写像に他ならないことを明らかにした。

(3) (正則断面曲率が-4の)複素双曲空間のホップ超曲面については、構造ベクトル場の主曲率の絶対値が2より大きい場合に、Montiel によって Cecil-Ryan と同様の構造定理が知られていた。一方で、構造ベクトル場の主曲率 μ の絶対値が2より小さい場合

には、構造定理が近年まで知られていなかったが、Ivey が奇数次元の球面内の 2 つのルジヤンドル部分多様体からそのようなホップ超曲面が構成されることを示した。そして、それらの中間の場合については分かっていた。本研究では、複素双曲空間内の実超曲面に対して、複素ミンコフスキー空間内の時間的ベクトルである位置ベクトルと、空間的ベクトルである単位法線ベクトルによって張られる、不定値 2 次元部分空間を対応させることにより、複素双曲空間内の実超曲面から複素ミンコフスキー空間に関する複素 2 平面グラスマン多様体へのガウス写像を構成した。そして、実超曲面がホップでないときには、ガウス写像ははめ込みであることを示した。一方で、ホップ超曲面の時には、構造ベクトル場の積分曲線に沿って、ガウス写像は一定であり、その像は不定値グラスマン多様体のパラ四元数ケーラー構造について、良い性質を持った半分次元の部分多様体であることを示した。特に、 μ の絶対値が 2 より大きくて、ガウス写像の像への誘導計量が非退化のときには、その像は不定値ケーラー部分多様体であって、 μ の絶対値が 2 より小さくて、かつガウス写像の像への誘導計量が不定値の時には、その像はパラケーラー部分多様体である。その中間の場合は、ベキ零的な構造で記述されることもわかった。以上から、複素双曲空間内のホップ超曲面が、このガウス写像により統一的に理解できるようになった。

(4) ケーラー多様体でリッチ曲率が 0 であるカラビ-ヤウ多様体内の特殊ラグランジュ部分多様体は、Harvey-Lawson によって定義され、超弦理論など物理学においても極めて重要な研究対象である。カラビ-ヤウ多様体の最も基本的な例である複素ユークリッド空間内の特殊ラグランジュ部分多様体の研究もまた数多くの研究がある。Harvey-Lawson は、実ユークリッド空間、あるいは球面内の部分多様体で、すべての法ベクトルについて、その形作用素の固有値の集合が -1 倍しても変わらないとき、austere と定義した。これは、極小部分多様体の特別なものである。Austere 部分多様体の研究は Bryant に始まっていくつかの研究はあるがまだそれほど多いとはいえない。本研究では、奇数次元球面内の austere 超曲面で、単位複素数の作用で不変であるようなものについて、すなわち複素射影空間内の実超曲面のホップファイブレーションによる逆像であるような超曲面を考察した。

その例としては、(i) $2m-1$ 次元の複素射影空間内の $m-1$ 次元全測地的複素射影空間上の半径 $1/4$ のチューブを考えると、そのホップファイブレーションによる逆像は $2m-1$ 次元の同じ半径の球面の直積であって、austere である。(ii) 複素射影平面内の全測地的実射影平面上の半径 $1/8$ のチューブを考えると、そのホップファイブレーションによる逆像

は 5 次元球面内の主曲率が 4 種の極小等径超曲面であって、austere である。(iii) 複素射影空間内の極小線織実超曲面を考える。すなわち、実超曲面は Levi-平坦であって、構造ベクトル場に直交する方向の接分布の積分多様体は、複素射影超平面とする。このとき、そのホップファイブレーションによる逆像は球面内の austere 超曲面である。

得られた結果として、複素射影平面内のホップ超曲面を考える。そのホップファイブレーションによる逆像が 5 次元球面内の austere 超曲面ならば、ホップ超曲面は全測地的実射影平面上半径 $1/8$ のチューブであって、そのホップファイブレーションによる逆像は、主曲率 4 種の極小等径超曲面(特に等質)である。次に、複素射影平面内の Levi-平坦超曲面を考える。そのホップファイブレーションによる逆像が 5 次元球面内の austere 超曲面ならば、その Levi-平坦超曲面とそのホップファイブレーションによる逆像は、それぞれ 3 次特殊ユニタリ群 $SU(3)$ の 1-パラメーター群の軌道から得られることが分かった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

1. Jong Taek Cho and Makoto Kimura, Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex 2-plane Grassmannian I, *Topology and its Applications*, 査読あり、196/ Part B, 594-607, 2015, <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2014.06.018>
2. Makoto Kimura, Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex 2-plane Grassmannian I, *Differential Geometry and its Applications*, 査読あり、35/ Supplement, 156-163, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.difgeo.2014.04.004>
3. Jong Taek Cho and Makoto Kimura, Reeb flow symmetry on almost contact three-manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, 査読あり、35/ Supplement, 266-273, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.difgeo.2014.05.002>
4. Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in

Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, 査読あり、65, 1135-1151 2013, <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06541135>

5. Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem. Real and complex submanifolds, 391 - 399, Springer Proc. Math. Stat., 106, Springer, Tokyo, 2014. 査読あり
6. Imsoon Jeong, Makoto Kimura, Hyunjin Lee, Young Jin Suh, Real Hypersurfaces in Complex Two-Plane Grassmannians with generalized Tanaka-Webster Reeb Parallel Shape Operator, Monatsh Math., 査読あり、171/ 3-4, 357-376, 2013 <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-013-0475-4>
7. Jong Taek Cho and Makoto Kimura, Austere hypersurfaces in 5-sphere and real hypersurfaces in complex projective plane, Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics Saga, August 4-6, 2012, World Scientific, 査読あり、245-259, 2013, http://dx.doi.org/10.1142/9789814566285_0021
8. Jong Taek Cho and Makoto Kimura, Ricci solitons on locally conformally flat hypersurfaces in space forms, Journal of Geometry and Physics, 査読あり、62/ 8, 1882-1891, 2012 <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.04.006>
9. Jong Taek Cho and Makoto Kimura, Transversal symmetries on real hypersurfaces in a complex space form, Hiroshima Mathematical Journal, 査読あり、43/ 2, 223-228, 2012, <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/hmj/>

〔学会発表〕(計 7 件)

1. Twistor space of complex 2-plane Grassmannian and Hopf hypersurfaces in complex projective space, One-day Workshop on "Submanifolds in Symmetric Spaces", Hachioji, Tokyo, Japan, 2016/01/22
2. Gauss Map of Real Hypersurfaces in Complex Projective Space and Submanifolds in Complex Two-Plane

Grassmannian, 17th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, Bulgaria, 2015/06/08

3. Hopf hypersurfaces in complex projective space, Invited Lecture at Chonnam University, Gwangju, Korea, 2014/03/19
4. Hopf hypersurfaces in non-flat complex space forms and submanifolds in Grassmannians, Matsue, Shimane, Japan, 2013/09/05
5. Hopf hypersurfaces in non-flat complex space forms and submanifolds in Grassmannians, DGA2013, Brno, Czech, 2013/08/20
6. Hopf hypersurfaces of non-flat complex space forms, 16th International Workshop on Differential Geometry, Taegu, Korea, 2012/11/01
7. Ricci solitons on hypersurfaces in space forms, International Conference of the Honam Mathematica Society, Jeju, Korea, 2012/06/15

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等
<http://kmakoto.sci.ibaraki.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 真琴 (Kimura, Makoto)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：30186332

(2) 研究分担者

大塚 富美子 (Ohtsuka Fumiko)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：90194208

入江 博 (Iriyeh Hiroshi)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：30385489

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()