

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 7 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540086

研究課題名(和文)平均化の手法による実及び複素フィンスラー幾何学の大域的研究

研究課題名(英文)A global approach in real and complex Finsler geometry by averaging methods

研究代表者

愛甲 正(Aikou, Tadashi)

鹿児島大学・理工学研究科・教授

研究者番号：00192831

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：実Finsler幾何学は多様体の点でパラメータ付けされたHesse多様体の族の微分幾何学であり、複素Finsler幾何学は多様体の点でパラメータ付けされたKähler多様体の滑らかな族の微分幾何学であり、本研究では、特に各ファイバー上で計量と接続を積分して得られる底空間の計量と接続の役割が大きい。本研究では、実Finsler幾何学では共形的理論を研究し、特に、共形的平坦性の新しい特徴付けを得た。また、複素Finsler幾何学の場合、Rizza-negativityの概念を導入し、正則ベクトル束のnegativityやamplenessをRizza計量の曲率を用いて議論した。

研究成果の概要(英文)：Finsler geometry is the differential geometry of smooth family Hessian manifolds or Kahlerian manifolds parameterized by base points corresponding to real or complex category. In this research, we have investigated real or complex Finsler geometry by using the averaging method, namely, we consider the averaged metrics and averaged connection obtained by the integral along the fibers. In particular, we have investigated the conformal geometry in real category, and we have obtained a characterization of conformal flatness of Finsler metrics. In complex category, we have introduced the notion of Rizza-negativity of holomorphic vector bundles, and further, we investigated the ampleness or negativity of holomorphic vector bundles in terms of the curvature of Rizza-structure which is naturally defined in the tautological line bundles.

研究分野：幾何学

キーワード：Finsler manifolds Rizza structures Rizza-negativity Averaged metrics Averaged connections

1. 研究開始当初の背景

2009年に発表された論文(V.S. Matveev, H.-B. Radmacher, M. Troyanov and A. Zeghib, Finsler conformal Lichnerowicz-Obata conjecture, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **59**, 3(2009), 937-949.)はFinsler計量のファイバー積分により得られるRiemann計量を導入することでFinsler幾何学におけるLichnerowicz-Obata予想を解決するものであった。また、2010年に発表された論文(R. G. Torrome and F. Etayo, On a rigidity condition for Berwald spaces, RACSAM **104** (1), 2010, 69-80)はFinsler接続をファイバー積分して得られるアフィン接続を構成しFinsler幾何学及びその物理学への応用を研究するものである。これらのファイバー積分を応用するという研究はFinsler幾何学に新しい手法を確立した。

一方で本研究開始以前は多くの研究者がFinsler幾何学をfibered Riemann多様体の幾何学とみて、接束の全空間のRiemann幾何学を研究していた。研究代表者はMatveev氏やTorrome氏等によるファイバー積分の手法(平均化の手法)がいくつかの未解決問題に進展をもたらすと予想し、直ちにこの平均化の手法を用いて、これまでの研究成果を見直すことから研究を開始した。得られた結果を "Averaged Riemannian metrics and connections with application to locally conformal Berwald manifolds, Publ. Math. Debrecen **80** (2012), 179-198" に発表した。本研究ではこの平均化するという研究手法をさらに発展させ、実及び複素Finsler幾何学への応用を展開した。

2. 研究の目的

Finsler計量とは接束、またはもっと一般にベクトル束の全空間で定義されたノルム関数であって零切断以外で滑らかであり、ファイバー座標に関するヘッシアンが正定値なものをいう。したがって各ファイバーにはRiemann計量が入る。本研究ではFinsler幾何学をRiemann多様体の可微分族の幾何学と解釈することが本質的である。実Finsler幾何学の場合、各ファイバーはHesse多様体であり、複素Finsler幾何学の場合は、各ファイバーはKahler多様体となっている。

実Finsler幾何学では次の重要な未解決問題がよく知られており、多くの研究者がその解決に向け研究を進めている。

共形的平坦性を特徴付ける曲率テンソルを構成せよ。

非Berwald空間であるLandsberg空間は存在するか？

複素Finsler幾何学では、計量の共形的平坦性を特徴付ける曲率テンソルは構成できている(T. Aikou, Conformal flatness of complex Finsler structures, Publ. Math. Debrecen **54** (2008), 165-179を参照)。しかし実Finsler幾何学では、共形的平坦性を特

徴付ける曲率テンソルが見つかっていないために共形幾何学の研究が十分とは言えない。本研究では共形幾何学の研究手法の確立も目的にした。本研究ではおおまかに次の2項目について研究した。

(1) 実Finsler幾何学の研究、特に接続の共形幾何学

(2) 複素Finsler幾何学の研究、特に複素多様体上の正則ベクトルのnegativity、特にGriffithsの意味でのnegativityの研究への応用。

3. 研究の方法

Finsler計量はベクトル束 $E \rightarrow M$ の各ファイバーにHesse計量またはKahler計量を定義する。このことは束の全空間 E 上の垂直部分束 V に計量を定義することであり、この計量をもつ垂直部分束 V の幾何学を研究することに他ならない。また垂直部分束 V は全空間上でのベクトル束の短完全系列

$$0 \rightarrow V \rightarrow TE \rightarrow \pi^*TM \rightarrow 0$$

を導き、この完全系列の分解を与えることは(非)線形接続を与えること、すなわち E にEhresmann接続を定義することに他ならない。ベクトル束に凸条件をみたくFinsler計量を与えられるとその計量から自然な非線形接続が求まる。さらに、この非線形接続よりFinsler接続が自然に定まる。

本研究を遂行するにあたっては、微分幾何学的な研究内容については研究代表者が担当し、主にベクトル束の微分幾何学の手法で研究を遂行した。特に共形幾何学については、Riemann幾何学の共形理論でよく用いられるWeyl接続をFinsler幾何学に拡張したFinsler-Weyl接続と古典的によく知られているWagner接続との関係を詳細に考察した。

複素解析幾何学的手法が必要な領域については宮嶋分担者と小櫃分担者が代表者に協力して研究を遂行した。また、宮嶋分担者の定年退職(平成25年3月)のため、最終年度は代表者と小櫃分担者の二人が研究を遂行した。複素Finsler計量をファイバー積分して得られる計量はWeil-Petersson計量と同様に定義されることから小櫃分担者の協力を得た。

4. 研究成果

(1) 実Finsler幾何学に関する研究

実Finsler幾何学におけるFinsler接続の標準的なものとしてBerwald接続がある。この接続はFinsler幾何学における、いわゆる双接続であって、その曲率の消滅はHesse計量の存在を保証する(T. Nagano and T. Aikou, Dual connections in Finsler geometry, Acta Math. Acad. Paedagogicae Nyiregyhaziensis, No. **24**(2008), 103-114)等、顕著な性質を持ち、古典的な研究では必ず現れる接続である。しかしこの接続は共形幾何学には適さないことが経験的に分かっている。

研究代表者は未解決問題の研究のため、

Riemann 幾何学で重要な Weyl 接続を拡張した Finsler-Weyl 接続の概念を導入し,その曲率の消滅で Finsler 計量の共形的平坦性を特徴付けることができた. さらに Finsler 計量が共形的に平坦なとき,この計量から平均化により得られる Riemann 計量も共形的に平坦なことを証明した. この成果は学会発表(3),(4)で報告した. また "Finsler-Weyl connections and conformal flatness of Finsler manifolds (by Jenizon and T. Aikou)" として投稿中である.

(2) 複素 Finsler 幾何学に関する研究

複素 Finsler 幾何学の研究は G. Schumacher 氏による研究 "The curvature of the Petersson-Weil metric on the moduli space of Kahler-Einstein manifolds", in Complex Analysis and Geometry (edited by V. Ancona and A. Silva), Plenum Press, 1993" に共通する部分も多い. すなわち, G. Schumacher の研究に用いられているベクトル場の水平リフトは,複素 Finsler 幾何学で用いられる非線形接続と同じ概念であることがわかる(例えば "A partial connection on complex Finsler bundles and its applications, Illinois J. Math. 42 (1998), 481--492." を参照). この非線形接続から定まる複素接続はその平行移動が Finsler 計量を保つこと証明できた.

複素 Finsler 計量をもつ正則ベクトル束に Rizza-negativity の概念を導入し,この仮定よりベクトル束の Griffiths の意味での negativity が得られることを証明し,学会発表(2), (5)で報告した. またこの成果は論文 "Rizza-negativity of holomorphic vector bundles (by Haripamyu and T. Aikou)" として投稿中である.

実又は複素のいずれの研究においても計量や接続よりファイバー積分により得られる新しい Riemann 計量 (Hermite 計量) やそれと適合する接続の存在を証明できたことが本研究の大きな成果である.

また未解決問題 については, Berwald 空間と Landsberg 空間の幾何学的意味づけを見直す必要があると思われる. Landsberg 空間は Berwald の非線形接続に関する平行移動が各ファイバーの Riemann 計量を保つことで特徴付けられている. 一方で Berwald 空間はその平行移動が与えられたノルム関数を保つことで特徴付けられる. ところで複素 Finsler 幾何学で用いられる非線形接続に関する平行移動は与えられたノルム関数と各ファイバーの Hermite 計量の双方を保つことを証明できる(発表論文(1)参照). したがって未解決問題 については,複素多様体の正則接束が複素 Finsler 計量をもつという強い仮定のもとでは, Berwald の非線形接続以外に意味のある非線形接続をとることにより, 解決できたと考えてよい.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

(1) T. Aikou, Some remarks on Rizza-Kahler manifolds, Publ. Math. Debrecen **84**(2014), 105-122. 査読有

(2) A. Harris and K. Miyajima, Involutive deformations of the regular part of a normal surface, in "Topics on real and complex singularities (ed. S. Koike et al.)", World Scientific, 51-59 (2014), 査読有

(3) K. Obitsu, Recent progress on Takhtajan-Zograf and Weil-Petersson metrics, 京都大学数理解析研究所講究録, 1852(2013), 30-41. 査読無

[学会発表](計11件)

(1) K. Obitsu, Several aspects of the Takhtajan-Zograf metric, Moduli space, Conformal field theory and Matrix models, 2015年3月16日(沖縄科学技術大学院大学).

(2) T. Aikou and Haripamyu, An application of averaging method to Rizza manifolds, The 49-th Symposium on Finsler Geometry, 2014年12月5日(長崎市)

(3) Jenizon and T. Aikou, Differential geometry in conformal Finsler manifolds, The 49-th Symposium on Finsler Geometry, 2014年12月7日(長崎市)

(4) T. Aikou, Some topics in conformal Finsler geometry, 29th Annual Meeting of Ramanujan Mathematical Society, 2014年6月24日(Pune, India)

(5) T. Aikou, Some remarks on Rizza-Kahler manifolds, Colloquium on Differential Geometry and its Applications, 2013年8月27日(Debrecen, Hungary).

(6) T. Aikou, A note on complex Finsler metrics on complex vector bundles, The 48-th Symposium on Finsler Geometry, 2013年9月15日(東海大学, 札幌市).

(7) K. Miyajima, CR approach to deformation of normal isolated singularities, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, 2013年9月9日(The University of Sydney, Australia)

(8) K. Miyajima, Introduction to s.p.c. CR structures and its deformation, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 2013年11月20日(東京理科大学, 野田市)

(9) 宮嶋公夫, 孤立特異点の変形へのCRアプローチ, 第9回代数・解析・幾何学セミナー, 2013年2月18日,(鹿児島大学, 鹿児島市)

(10) T. Aikou, Some remarks on Rizza-Kähler manifolds, The 47-th Symposium on Finsler Geometry, 2012年11月23日(鹿児島市).

(11) K. Obitsu, Recent progress on Takhtajan-Zograf and Weil-Petersson metrics, Geometry of Moduli space of low dimensional manifolds, 2012年10月(京都大学数理解析研究所).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

愛甲 正 (AIKOU TADASHI)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 00192831

(2) 研究分担者

小櫃 邦夫 (OBITSU KUNIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 00325763

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 40107850

(平成25年度まで)