

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540089

研究課題名(和文) 高分子のトポロジーへの応用を目指す結び目の局所変形の研究

研究課題名(英文) Study on local moves of knots with application to polymer topology

研究代表者

金信 泰造 (KANENOBU, Taizo)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00152819

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：結び目，絡み目のバンド手術，交差交換，SH(3)移動など種々の局所変形に関する研究をおこなった．これらの局所変形に関する結び目，絡み目の間の距離を下から評価するための方法をさらに与えた．すなわち，ジョーンズ多項式，Q多項式，HOMFLYPT多項式の特殊値を使う方法，すでに知られている交差交換で移り合う結び目の行列式に関する条件をバンド手術に応用して得られた条件などである．以上を適用することにより，7交点までの結び目のSH(3)距離の表の作成，H(2)距離の表の改良，6交点までの向きの付いた2成分絡み目の交差交換距離の表の作成，12交点までの素な結び目の結び目解消数の表の改良をおこなった．

研究成果の概要(英文)：We studied several local moves on knots and links such as a band surgery, crossing change, and SH(3)-move. We introduce further criteria to estimate the lower bound of the Gordian distances between two knots or links, which use the special values of the Jones, Q, and HOMFLYPT polynomials. Also, we gave criteria for the determinants between two links which are related by a band surgery, which come from the known criteria between two knots which are related by a crossing change. Then we gave a table of SH(3)-Gordian distances between knots with up to 7 crossings, we improved a table of H(2)-Gordian distances between knots with up to 7 crossings, we gave a table of Gordian distances between 2-component links with up to 6 crossings, and we improved a table of unknotting numbers of knots with up to 12 crossings.

研究分野：数学

キーワード：結び目 絡み目 バンド手術 交差交換 多項式不変量 DNA結び目

1. 研究開始当初の背景

DNA 分子は、複製、転写、組み換えという遺伝現象の核心をなす過程において位相的な構造が変化するが、それはトポイソメラーゼとよばれる酵素の働きによるものである。トポイソメラーゼとは、DNA の鎖を切断して、さらに結合するというような操作をおこなう酵素の総称である。トポイソメラーゼは環状の DNA に対して図 1 の交差交換や H(2) 移動のような作用をすると考えると結び目理論に適用することができる。このようにして結び目理論の研究を初めて DNA に応用したのが、1980 年代のエルンストとサムナーズの研究である。(文献 [ES]) すなわち、かれらは、生物学者が予想した、ある組み換え酵素の作用のモデルが数学的に正しいことを、結び目理論を利用して示すことに成功した。これに続く研究は、とくに欧米において盛んに進められている。日本でも、デーモン手術の研究と関連して埼玉大学の下川航也等が研究をおこなっている。

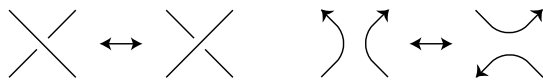


図 1. 交差交換と H(2) 移動

一方、結び目理論においては、局所変形の研究は古くから様々な形でおこなわれてきている。結び目をほどくことができる種々の局所的な変形が知られており、それらは結び目解消操作と総称されている。その代表的なものが交差交換であり、結び目をほどく交差交換の最小数のことを結び目解消数とよんでいる。現在でもゲージ理論等最新の理論を応用する詳細な研究が進められている。結び目の局所変形は様々な形で古典的結び目理論に現れている。例えば、Conway 多項式、Jones 多項式、HOMFLYPT 多項式等の多項式不変量は、局所的に異なる 3 個の結び目、絡み目の間のスケイン関係式を用いることで定義される。また、ヴァシリエフ不変量(有限型不変量)は葉広による局所変形である C_n 移動の理論で理解することができる。逆にいえば、結び目の局所変形の研究は、結び目の様々な不変量の研究に直結している。

また、DNA の研究とも関連して、高分子化学において、同様に、ひも状の高分子が結び目を作ったり、あるいは、絡んだりすることが知られており、このような現象の解析において結び目理論の応用が見込まれる。また、この場合は円周だけでなく、さらに広く空間グラフ、すなわち、グラフの埋め込みの研究も必要となる。数学理論がはっきりと大きな成果をあげて応用された例はないが、簡単な空間グラフの分類等の基礎的な研究が高分子化学で必要となっている。

すでに、2009 年から 2011 年にかけて科学研究費助成事業・基盤研究(C)『DNA 結び目への応用を目指す結び目の局所変形』において、

同様の趣旨の研究をおこなってきており、本研究はその継続発展を目指したものである。

文献 [ES] Ernst, C. and Sumners, D. W.: A calculus for rational tangles; Applications to DNA recombination, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 102 (1990) 489-515.

2. 研究の目的

本研究の目的は、DNA 結び目に作用する酵素の特徴付けを調べる分子生物学の研究、および、高分子のトポロジー(位相的な構造)の研究への応用を目指して、結び目、絡み目の局所変形の研究や空間グラフの研究を進めることである。DNA 分子は、複製、転写、組み換えという遺伝現象の核心をなす過程においてトポロジーが変化するが、それはトポイソメラーゼとよばれる酵素の働きによるものである。DNA 結び目の局所変形を引き起こすトポイソメラーゼの作用の解析を念頭におきつつ結び目、絡み目の局所変形の研究をおこなうことが目的である。

本研究では、次の 4 点に重点をおいて研究をおこなう。

- (1) 結び目、絡み目のバンド手術の研究。
- (2) 結び目、絡み目の H(n) 移動、および、SH(n) 移動の研究。
- (3) 結び目、絡み目のシャープ移動、パス移動、デルタ移動の研究。
- (4) 空間グラフの分類と局所変形の研究。それぞれについて説明する。(1) のバンド手術は、図 2 で示すように、結び目、絡み目の一部にバンドを貼り、それに沿っておこなう局所変形のことである。

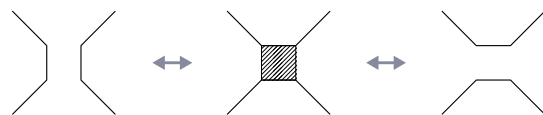


図 2. バンド手術

ただし、結び目、絡み目の向きにより 2 種類考えられる。変形の前後で向きが合う場合を整合的バンド手術とよび、向きが一部逆転するような場合を非整合バンド手術とよぶ。とくに、結び目の非整合バンド手術では成分数が変化せず、この場合は H(2) 移動とよぶ。これらのバンド手術は結び目解消操作であり、したがって、与えられた 2 つの結び目、絡み目に対して、これらの変形操作を用いて一方を他方に変形するときの最小回数を定義することができるが、それらをそれぞれ整合的バンド距離、H(2) 距離とよぶ。

本研究では、結び目、絡み目の間のこれらの距離を決定することが一つの大きな目標となる。下からの評価のために、前研究から引き続いて多項式不変量の特殊値を始め様々な結び目、絡み目の不変量を用いる方法をさらに開発することが必要である。また、上からの評価のための方法の研究も考慮す

る必要がある。

(2) とくに、結び目、絡み目の $H(2)$ 移動、および、 $SH(3)$ 移動の研究をおこなう。 $H(2)$ 移動は(1)で述べたように非整合バンド手術である。 $SH(3)$ 移動は Hoste-Taniyama-Nakanishi によって定義された成分数を変えない局所変形操作で、連続する 2 回の整合的バンド手術に相当する。これらの変形の距離を決定することが目的である。

(3) シャープ移動(図 3)は DNA の 2 重らせんを同時に切断する II 型のトポイソメラーゼの作用に対応する。シャープ移動は、村上斉によって結び目解消操作であることが示され結び目解消距離についての研究が始まったが、これについて最近の交代化数の研究と関連させて進めていきたい。



図 3 . シャープ移動

(4) 空間グラフについてもすでに先行する様々な結果がある。とくに、ある空間グラフでは、いつも結び目を含むという Conway, Gordon の結果があり、一般に空間グラフの標準的なものを定めるのは困難で、ここに空間グラフの扱いにくさがある。これを解消して分類問題を考察するための局所変形の研究が有効であると考えられる。さらに、特殊であるがよく現れる空間グラフであるシート()曲線や手錠型グラフ(handcuff graph)の分類問題を有限型不変量の研究と関連させて進めていきたい。

3. 研究の方法

研究目的に沿った成果を得るために、当研究課題である『結び目』や『結び目の科学(とくに DNA や高分子化学)への応用』をテーマとするさまざまな研究集会等に参加し、結び目理論や低次元多様体論の話題に精通している多岐にわたる研究者との情報交換をおこない共同研究にあたった。実際、学会発表にある国内外の学会、研究集会に出席している。とくに、大阪市立大学で開催される

「Friday Seminar on Knot Theory」(毎週の結び目理論のセミナー)、および、大阪市立大学文化交流センターで開催される京阪神地区の研究者が一同に会する「NKOOK セミナー」(ほぼ毎月開催)には積極的に参加した。研究代表者、分担者もこれらのセミナーの運営を担っている。また、分担者の森内博正とは、頻りに研究連絡を取り合いながら共同研究を進め、その成果を共著論文にまとめ、学会発表もおこなった。さらに、コンピュータを利用した結び目の多項式不変量の計算が当研究において、決定的に重要な役割を果たしたことも注意したい。

4. 研究成果

(1) 向きを無視したバンド手術の研究(発表論文)。与えられた結び目に対して、向きを無視してバンド手術をおこなって自明にするためのバンド手術の最小数(バンド結び目解消数)と、成分数を変えない $H(2)$ 移動だけで自明にするときの $H(2)$ 移動の最小数($H(2)$ 結び目解消数)との差が高々 1 であることを示した。また、9 交点までの結び目に対して、これら 2 種類の結び目解消数の表を作成した。

(2) 整合的バンド手術、非整合的バンド手術、交差交換によって移り合う 2 つの結び目、絡み目の間のジョーンズ多項式、 Q 多項式、 $HOMFLYPT$ 多項式の特異値については、研究代表者の金信の研究を含めいくつか知られていた条件があるが、それらに加えて、さらに新たな条件を発見した。また、村上斉の 2 本橋結び目との交差交換距離が 1 になる結び目の行列式の条件を利用して、2 本橋結び目とのバンド手術距離が 1 になる絡み目の行列式の条件を与えた(以上、発表論文)。同様に、中西康剛の結び目解消数が 1 の結び目との交差交換距離が 1 になる行列式の条件を利用して、結び目解消数が 1 の結び目とのバンド手術距離が 1 になる行列式の条件を与えた。ジョーンズ多項式の特異値を使って、 $H(2)$ 距離が 2 になる 2 つの結び目の条件を与えた。これと Zekovic の $H(2)$ 距離の上からの評価の表を使って、7 交点までの結び目の間の $H(2)$ 距離の表を改良した。(以上、発表論文)。

(3) 7 交点までの結び目の間の $SH(3)$ 距離の表を与えた(発表論文)。(2)の下からの評価の方法を用いている。

(4) 6 交点までの向きの付いた 2 成分の絡み目の間の交差交換距離の表を与えた(発表論文)。とくに、(2)のジョーンズ多項式の特異値による方法が大きな役割を果たした。また、Kohn が 9 交点までの 2 成分絡み目の(交差交換による)絡み目解消数の表を作成していたが、そのうち 3 個が未決定であった。そのうちの 1 個についてジョーンズ多項式を用いた方法により 3 と決定することができた。

(5) 12 交点までの素な結び目の結び目解消数の下からの評価の表を与えた(発表論文)。12 交点までの素な結び目の結び目解消数の表が、Cha, Livingston の Knot Info というインターネットのサイトにあるが、有限巡回分岐被覆空間のホモロジー群の階数による Wendt の定理、多項式不変量の特異値を用いた宮澤康行の定理を適用して、多くの結び目の未決定の結び目解消数を決定、あるいは評価の改良に成功した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10 件)

Kanenobu, Taizo, Band surgery on

knots and links, III, Journal Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 25, No. 9 (2016). 査読有.
DOI:10.1142/S0218216516500565
Kanenobu, Taizo; Moriuchi, Hiromasa, SH(3)-Gordian distances between knots with up to seven crossings. Topology Appl. Vol. 196 (2015), part B, 537-550. 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2015.05.032>
Doi 10.1016/j.topol.2015.05.032
Kanenobu, Saori; Kanenobu, Taizo, Oriented Gordian distance of two-component links with up to seven crossings. J. Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 24, No. 10 (2015), 1540013, 14 pp. 査読有.
DOI: 10.1142/S0218216515400131
Kanenobu, Taizo; Matsumura, Satoshi, Lower bound of the unknotting number of prime knots with up to 12 crossings. J. Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 24, No. 10 (2015), 1540012, 9 pp. 査読有.
DOI: 10.1142/S021821651540012X
Abe, Tetsuya; Kanenobu, Taizo, Unoriented band surgery on knots and links. Kobe J. Math. 31 (2014), no. 1-2, 21-44.
Kanenobu, Taizo; Moriuchi, Hiromasa, Links which are related by a band surgery or crossing change. Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 20 (2014), no. 2, 467-483. 査読有.
DOI:10.1007/s40590-014-0032-8
Kanenobu, Taizo; SH(3)-move and other local moves on knots. Osaka J. Math. 51 (2014), no. 2, 439-457. 査読有.
Kanenobu, Taizo; Moriuchi, Hiromasa, A table of coherent band-Gordian distances between knots, RIMS Kōkyūroku, No. 1866 (2013)105-119.
Kanenobu, Taizo, Band surgery on knots and links, II, J. Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 21, No. 9 (2012) 1250086, 22 pp. 査読有.
DOI: 10.1142/S0218216512500861
Ichimori, Atsushi; Kanenobu, Taizo, Ribbon torus knots presented by virtual knots with up to 4 crossings, J. Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 21, No. 13 (2012) 1240005, 30 pp. 査読有.

[学会発表](計 20 件)

金信泰造, Enumeration of ribbon 2-knots presented by welded arcs with up to four crossings, The 8th

KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics, 2016 年 7 月 29 日, 韓国釜山国立大学, 釜山(韓国).
金信泰造, 4 交点仮想弧により表される 2 次元リボン結び目の数え上げ, 拡大 KOOK セミナー2016, 2016 年 8 月 23 日, 大阪電気通信大学(大阪府・寝屋川市).
金信泰造, Classification of ribbon 2-knots presented by virtual arcs with up to four, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 2017 年 2 月 13 日, 東京大学大学院数理学研究科(東京都).
金信泰造, 向きの付いた絡み目の交差交換距離, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2015 年 5 月 9 日, 東京女子大学(東京都).
金信泰造, 結び目 絡み目の交差交換距離とバンド手術距離, 拡大 KOOK セミナー2015, 2015 年 8 月 18 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市).
金信泰造, Distances of knots and links by crossing change or band surgery, Seminar of Topology and Geometry, University of Geneva, Switzerland, 2015 年 9 月 17 日, ジュネーブ(スイス).
金信泰造, Nakanishi's criterion on Gordian distance one knots and band surgery, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 2016 年 1 月 28 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市).
金信泰造, Band-Gordian distances between a knot and a 2-component link with up to 7 crossings, TAPU-KOOK Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics, National Institute for Mathematical Sciences (NIMS), 2014 年 7 月 25 日, 大邱(韓国).
金信泰造, Local Moves on Knots and Polynomial Invariants, Knots and Low Dimensional Manifolds: Satellite Conference of Seoul ICM 201, 2014 年 8 月 26 日, BEXCO Convention & Exhibition Center II, 釜山(韓国).
金信泰造, Oriented Gordian distance of two-component links with up to six crossings, Knots and Manifolds, 2015 年 2 月 7 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市).
金信泰造, Gordian distances of knots, 第 5 回 KOOK-TAPU 合同セミナー, 2013 年 7 月 26 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市).
金信泰造; 森内博正, 7 交点の結び目の整合的バンド・ゴルディアン距離, 2013 年度秋季総合分科会トポロジー分科会一般講演, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学(愛媛県・松山市).

金信泰造, H(2)-Move and Other Local Moves on Knots, AKOOS-PNU International Conference 2014, 2014年2月7日釜山(韓国).

金信泰造;森内博正,多項式不変量による結び目のゴルディアン距離の評価, 2014年度日本数学会年会トポロジー分科会,一般講演,2014年3月15日,学習院大学(東京都).

金信泰造,結び目の局所変形--H(2)距離--,Topology mini workshop,日本大学文理学部コンピューターセンターオーバル・ホール,2014年3月20日,日本大学文理学部(東京都).

金信泰造,SH(3)-move and other local moves on knots,第4回KOOK-TAPU合同セミナー,2012年7月25日,釜山(韓国).

金信泰造,結び目の局所変形をめぐって,第59回トポロジーシンポジウム,2012年8月11日,佐賀大学理工学部(佐賀県・佐賀市).

金信泰造,Links which are related by a band surgery or crossing change,2013年結び目と関連分野についてのTAPUワークショップ,2013年2月4日,大邱(韓国).

金信泰造,Links which are related by a band surgery or crossing change,E-KOOKセミナー,2013年2月14日,大阪市立大学学術情報センター(大阪府・大阪市).

金信泰造,Links which are related by a band surgery,Knots in east Osaka VI,2013年2月23日,大阪工業大学(大阪府・大阪市).

金信泰造,結び目の局所変形入門(1),(2),第7回札幌・福岡幾何学セミナー,2013年2月20,21日,北海道大学理学部(北海道・札幌市).

6. 研究組織

(1)研究代表者

金信 泰造 (KANENOBU Taizo)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00152819

(2)研究分担者

河内 明夫 (KAWAUCHI Akio)
大阪市立大学・大学院理学研究科・特任教授
研究者番号：00112524

田山 育男 (TAYAMA Ikuo)
大阪市立大学・大学院理学研究科・研究員
研究者番号：00382036

森内 博正 (MORIUCHI Hiromasa)
近畿大学・医学部・講師