

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540090

研究課題名(和文) 対称空間における部分多様体の幾何学と調和写像論の研究

研究課題名(英文) Research on submanifold geometry and harmonic map theory in symmetric spaces

## 研究代表者

大仁田 義裕 (Ohnita, Yoshihiro)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90183764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、幾何学的変分問題、可積分系理論、リー理論、シンプレクティック幾何の観点から、対称空間への調和写像と可積分系、ラグランジュ部分多様体のハミルトン極小・安定性、等径超曲面に関わるラグランジュ部分多様体、等径部分多様体、の研究を推進した。とくに、標準球面の等径超曲面のガウス像として得られる複素2次曲面に埋め込まれた閉極小ラグランジュ部分多様体の性質・構造を議論、最小マスロフ数公式、等質な場合のハミルトン安定性の完全決定などの成果を発表した(Hui Maと共同研究)。さらに、等径超曲面のガウス像のハミルトン交叉性に新たな結果を得ている(入江博, Hui Ma, 宮岡礼子との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：In this project, from the viewpoints of geometric variational problems, integrable systems, Lie theory, symplectic geometry, we promoted to study harmonic maps in symmetric spaces and integrable systems, Hamiltonian stability of Lagrangian submanifolds, minimal submanifold theory, Lagrangian submanifolds related to isoparametric hypersurfaces, isoparametric submanifolds of finite and infinite dimensions. Especially, we has published our results on the property and structure of compact minimal Lagrangian submanifolds embedded in complex hyperquadrics obtained as the Gauss images of isoparametric hypersurfaces (joint work with Hui Ma), such as the formula of minimal Maslov number, complete determination of Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces and so on. More recently we obtain new results on Hamiltonian non-displaceability of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces in another joint work with Hiroshi Iriyeh, Hui Ma and Reiko Miyaoka.

研究分野：微分幾何学

キーワード：部分多様体論 極小部分多様体 ラグランジュ部分多様体 対称空間 等径超曲面 調和写像 可積分系

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、対称空間内の部分多様体の幾何学および調和写像論の微分幾何学的側面に関して研究に取り組んでいる。本研究課題では、とくに、研究代表者が中心的役割をしている次の最近の研究が背景として一層の研究発展を目指すものである。

(1) 複素ユークリッド空間および複素射影空間に埋め込まれた第2基本形式平行なラグランジュ部分多様体の強ハミルトン安定性定理 (Amarzaya-大仁田, 2003, 2008)

(2) 3次元複素射影空間の  $SU(2)$  の軌道として得られる第2基本形式平行でない閉極小ラグランジュ部分多様体 (River Chiang ラグランジアン) の強ハミルトン安定性定理 (Bedulli-Gori, 大仁田, 2007)

(3) 奇数次元単位標準球面の等質極小ルジユンドレ部分多様体上の特殊ラグランジュ錐の安定性指数と剛性の研究 (大仁田, 2007)

(4) 単位標準球面の等径超曲面のガウス像 (ガウス写像の像) として得られる複素2次超曲面に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性・最小マスロフ数など性質・構造の研究および複素2次超曲面のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類定理 (Hui Ma-大仁田, 2009)

### 2. 研究の目的

本研究課題では、対称空間の部分多様体の幾何学および調和写像論を、互いに関わる次の対象を焦点として、幾何学的変分問題、可積分系理論、有限次元および無限次元リー理論の観点から研究することを目的とする：

(1) 対称空間における曲面からの調和写像や多重調和写像などの可積分系に密接な幾何学的対象の一層の研究。(2) ラグランジュ部分多様体と極小部分多様体の研究。(3) 等質ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性問題。(4) 等径超曲面から得られる複素2次曲面の極小ラグランジュ部分多様体の研究。(5) 有限次元及び無限次元リー理論的方法による等径部分多様体研究。

### 3. 研究の方法

常に集中的かつ総合的な観点をもって本研究課題を推進した。研究分担者・加藤信准教授、研究協力者・橋本要氏 (大阪市立大学数学研究所員) と連携研究者・酒井高司准教授、田中真紀子教授、小池直之教授、Martin Guest 教授とは随時それぞれの研究担当に関して有効な研究連絡や情報交換を行った。

また、本研究課題に関わる多くの研究者を集め、国内研究集会 “Differentiable Geometry of Submanifolds and its Related Topics” (2012年8月佐賀大学) を開催、組織委員の一人を務め、佐賀大学・前田定廣教授らと協力して、そのプロシーディングスを World Scientific 社より出版した。また、韓国 ICM 2014 Satellite Conference “Real and

Complex Submanifolds” (August 10-12, 2014, NIMS, Daejeon) を、Young Jin Suh 教授 (慶北国立大学)、Jürgen Berndt 教授 (キングスカレッジロンドン) らとともに組織して開催、そのプロシーディングスを Springer より出版した。研究代表者は、中国・北京の清華大学数学科学系 Hui Ma (馬輝) 教授 (2014年末に副教授から昇任) との共同研究は、 $n+1$ 次元単位標準球面内の等径超曲面  $N$  のガウス像 (ガウス写像  $g$  の像) として得られる複素2次超曲面  $Q_n(\mathbb{C})$  に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体  $L=g(N)$  を研究対象とする。 $N$  の相異なる主曲率の個数を  $g$ 、その重複度を  $(m_1, m_2)$  で表す (Münzner  $n$  の定理  $g=1, 2, 3, 4$  または  $6$ )。等径超曲面のガウス像の性質・構造に関する研究代表者と Hui Ma らの結果 ( $Z_g$ -被覆, 最小マスロフ数公式  $L=2n/g=m_1+m_2$  など) は有用なツールとなる (Y. Ohnita: Geometry of Lagrangian Submanifolds and Isoparametric Hypersurfaces, Proceedings of The 14<sup>th</sup> International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 14 (2010), pp43-67, NIMS, KMS, GRG, MR2757809. Hui Ma-Ohnita 共著論文, 等)。微分幾何学における等径超曲面理論は、エルミート対称空間、より一般にケーラー  $C$  空間内の種々のラグランジュ部分多様体の興味深い構成を示唆する。

### 4. 研究成果

研究代表者は、中国・北京の清華大学数学科学系 Hui Ma (馬輝) 教授 (2014年末に副教授から昇任) との共同研究は、単位標準球面内の等質等径超曲面のガウス像として得られる複素2次超曲面のコンパクト極小ラグランジュ部分多様体の (強) ハミルトン安定性およびハミルトン剛性を完全に決定した研究 (2009, プレプリント約 170 ページ) を Part I, Part II に分割し、その内容も相当の改良を加えた。その研究論文の Part I は微分幾何学分野の世界トップジャーナルの Journal of Differential Geometry に、Part II は Tohoku Mathematical Journal に掲載および掲載決定された。我々の等径超曲面のガウス像を  $Q_n(\mathbb{C})$  内のラグランジュ部分多様体として研究するアプローチは、今後の新たな等径超曲面研究を示唆している。論文, 等では、 $CP^{n+1}$  のある等径超曲面族を使って、 $Q_n(\mathbb{C})$  の任意の閉ラグランジュ部分多様体から、その等径関数のハミルトンフローで不変な閉ラグランジュ部分多様体の1径数族の構成を与えた。構成されたラグランジュ部分多様体は、実射影部分空間と交叉をもたない。構成の計算では、前田定廣教授からの実超曲面論の助言が有用であった。

等径超曲面のガウス像のハミルトン変形のもとでの交叉問題研究は、RIMS 共同研究「等径超曲面のガウス像のラグランジュ交叉理論」(2014年6月)において、Hui Ma,

宮岡礼子(東北大), 入江博(東京電機大)との共同研究で等径超曲面のガウス像のフレアーコホモロジーに関する研究を集中的に行い, 「 $g=3, m=2,4,8$  の場合, 等径超曲面のガウス像は, 任意のハミルトン変形で non-displaceable」( $g=1,2$  の場合は実形で入江-酒井-田崎の結果より既知) という新たな結果を得た。さらに, 2014 年 12 月に Hui Ma, 宮岡, 入江と一層の共同研究に取り組み, RIMS 共同研究の結果を大幅に拡張して「 $g=3,4,6$  で  $m_1, m_2 = 2$  の場合, 等径超曲面のガウス像は, 任意のハミルトン変形で non-displaceable」という予想を上回る結果が得られた。4 者による共著論文を現在準備中である。残された場合は,  $(g, m_1, m_2) = (3,1,1), (4,1,k) (k \geq 1), (6,1,1)$  であるが, 等径超曲面論 (E.Cartan, 高木亮一, Dorfmeister-Nehr, 宮岡礼子) においてこれらはすべて等質であることが知られている。これらの残された場合も含めた等径超曲面のガウス像のフレアー(コ)ホモロジーのより深い具体的な研究は今後の課題である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文](計 6 件)

H. Ma and Y. Ohnita: Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. , to appear in Tohoku Math. J. 査読有

Y. Ohnita: Geometry of Lagrangian submanifolds related to isoparametric hypersurfaces, In: Real and Complex Submanifolds, Daejeon, Korea, August 2014. Editors: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 106, pp. 117-127, Springer Japan 2014. 査読有

H. Ma and Y. Ohnita: Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. I, J. Differential Geom. 97 (2014), 275-348. 査読有  
<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1405447807>

Y. Ohnita: Geometry of Certain Lagrangian Submanifolds in Hermitian Symmetric Spaces, "Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics", Proceedings of the International Workshop in Honor of S. Maeda's 60th Birthday, edited by S. Maeda, Y. Ohnita, Q.-M. Cheng, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014, pp.60-81.(論文 の続編・改良版) 査読有

Y. Ohnita: On intersections of the Gauss images of isoparametric

hypersurfaces, Proceedings of The 17th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 17 (2013), pp.201-213, ed. by Y.-J. Suh, J. Berndt and H. Lee, NIMS and GRG. 査読無

<http://webbuild.knu.ac.kr/~yjsuh/Y.Ohnita>: Certain compact homogeneous Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces, Proceedings of The 16th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 16 (2012), pp.225-240, ed. by Y.-J. Suh, J. Berndt and H. Lee, NIMS and GRG. 査読無

<http://webbuild.knu.ac.kr/~yjsuh/>

##### [学会発表](計 15 件)

Yoshihiro Ohnita, Lagrangian intersection theory of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces (joint work with Hiroshi Iriyeh, Hui Ma and Reiko Miyaoka), 第 9 回大阪市立大学数学研究所-慶北国立大学 HGRG 共催 微分幾何学ワークショップ「部分多様体幾何学とリー理論」, 2015.2.12-2.14. 大阪市立大学. 2015 年 2 月 14 日, 招待講演

Yoshihiro Ohnita, Geometry of Lagrangian submanifolds related to isoparametric hypersurfaces, Mathematics Colloquium, 慶北国立大学 数学教室, 大邱(韓国), 2014 年 11 月 5 日, 招待講演

Yoshihiro Ohnita, Lectures on differential geometry of Lagrangian submanifolds and minimal submanifolds, Mini-International Workshop on Lagrangian submanifolds and related fields (Intensive lectures for graduate students), 2014.11.5-11.7, 慶北国立大学 大邱(韓国), 組織: Young Jin Suh 教授(慶北国立大学), 招待講演  
Yoshihiro Ohnita, Geometry of Lagrangian Submanifolds related to Isoparametric Hypersurfaces, 2014 ICM Satellite Conference & the 18th International Workshop on Real and Complex Submanifolds (August 10(Sun)-12(Tue), 2014), NIMS, Daejeon (Korea), 2014年8月11日. 招待講演

Yoshihiro Ohnita, On the intersection of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, 清華大学数学科学系 セミナー講演(90分), 2013年11月28日清華大学数学科学系, 北京(中国)招待講演  
岡山県福岡市)招待講演

大仁田義裕, On intersections of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, 福岡大学微分幾何学研

研究会“Geometry and Something”, 2013年11月4日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市)招待講演

Yoshihiro Ohnita, Geometry of Lagrangian Submanifolds related to Isoparametric Hypersurfaces, The 2nd Pacific Rim Mathematical Association Congress (PRIMA 2013), June 24-28, 2013, Special Session: Applications of Harmonic Maps and Submanifold Theory, 2013年6月24日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai (P.R.China) 招待講演

Yoshihiro Ohnita, Geometry of Lagrangian submanifolds related to isoparametric hypersurfaces, KCL/UCL Geometry Seminar (King's College London/University College London joint geometry seminar), 2013年03月12日, University College London, London (England) 招待講演

大仁田義裕, Willmore予想に対する可積分系アプローチ(1),(2), 研究会「多様体上の変分問題と周辺領域」- Willmore曲面について -, 2013年02月16日, 山口県健康づくりセンター(山口県山口市)招待講演

Y. Ohnita, Geometry of Lagrangian submanifolds related to isoparametric hypersurfaces, Seminar of Symplectic Geometry and Mathematical Physics, 2013年01月03日, Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing (P.R.China) 招待講演

大仁田義裕, A construction of certain Lagrangian submanifolds in complex projective spaces, 研究集会「部分多様体論・湯沢2012」, 2012年11月23日, 湯沢グランドホテル(新潟県南魚沼郡湯沢町)招待講演

大仁田義裕, A construction of certain Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces, 福岡大学微分幾何学研究会“Geometry and Something, 2012”年11月04日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市)招待講演

Y. Ohnita, Certain compact homogeneous Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces, The 16th Kyungpook National University International Workshop on Differential Geometry Workshop, 2012年11月01日, Kyungpook National University, Taegu (Korea) 招待講演

大仁田義裕, エルミート対称空間の等質ラグランジュ部分多様体とハミルトン安定性問題, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2012」, 2012年09月03日, 東京理科大学森戸記念館第1フォーラム(東京都新宿区)招待講演

大仁田義裕, 対称空間の部分多様体の微分幾何, 研究集会「部分多様体の微分幾何学及び関連課題」, 2012年08月05日, 佐賀大学理工学部(佐賀県佐賀市)招待講演

[図書](計2件)

"Real and Complex Submanifolds", Daejeon, Korea, August 2014. Editors: Young Jin Suh, Juergen Berndt, Yoshihiro Ohnita, Byung Hak Kim, Hyunjin Lee, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 106, 2014, ISSN 2194-1009

ISSN 2194-1017(electronic), ISBN

978-4-431-55214-7

ISBN 978-4-431-55215-4(eBook), DOI

10.1007/978-4-431-55215-4 (総ページ数530)

Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, Proceedings of the International Workshop in Honor of S. Maeda's 60th Birthday, edited by S. Maeda, Y. Ohnita, Q.-M. Cheng, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. ISBN978-981-4566-27-8 (総ページ数300)

[その他]

ホームページ等

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大仁田 義裕 (OHNITA, Yoshihiro)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90183764

(2) 研究分担者

加藤 信 (KATO, Shin)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 10243354

(3) 連携研究者

酒井 高司 (SAKAI, Takashi)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 30381445

マーティン ゲスト (GUEST, Martin)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 10295470

小池 直之 (KOIKE, Naoyuki)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号: 00281410

田中 真紀子 (TANAKA, Makiko S.)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号: 20255623