様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ９ 月 ２５ 日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００９２

研究課題名（和文）ケーラー・リッチ流の研究

研究課題名（英文）Study of Kahler Ricci flows

研究代表者
辻　元（Tsuji, Hajime）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：３０１７２０００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：射影代数多様体の射影族上の初期値を全空間上のケーラー形式とした場合、ファイバー毎のケーラー・リッチ流を一斉に走らせた場合に半正値性を保つことを証明した。手法としては、ベルグマン核の変動に関するBerndtssonの結果とケーラー・リッチ流をベルグマン核のイテレーションとして実現する代表者自身の先行研究の成果を組み合わせたものである．この結果は，相対随伴束の直像の半正値性に関する先行研究をケーラー・リッチ流を使って精密化したものと捉えることができる。

なお、この研究はエコール・ポリテクニックのSebastien Boucksom氏との共同研究である。

研究成果の概要（英文）：We study the family of fiberwise Kaehler-Ricci flows on a smooth projective family of projective varieties with pseudoeffective canonical classes. We have proven that if the initial form is a Kaehler form on the total space, the resulting family of Kahler-Ricci flows preserves the semipositivity. The method is the approximation of the Kaehler-Ricci flows in terms of the dynamical system of Bergman kernels and then apply the logarithmic plurisubharmonic variation properties of Bergman kernels due to B. Berndtsson. This resul can be viewed as a refinement of the semiposity of the direct image of pluri adjoint line bundles.

This reserch is a joint project with S. Boucksom in Ecole Polytechnic in Paris.

研究分野：複素多様体論

キーワード：ケーラー・リッチ流　ベルグマン核　随伴直線束　多重劣調和関数

１．研究開始当初の背景

リッチ流の研究は、R.Hamilton により創始され、微分幾何学に多大な影響を与えた。たとえば、コンパクト 3 次元単連結多様体は、3 次元球面になるか？というポアンカレ予想は、ペレルマンによりリッチ流の詳細な解析により解かれた。

一方、1980 年代後半に、H.D.Cao は、S,.T.Yau によるカラビ予想の解を、ケーラー・リッチ流の方法で解いた。この方法は、ケーラークラスを一つ固定して、その中でフローを考える方法であった。その直後に代表者は、ケーラーリッチ流をケーラークラスを固定せず、ケーラークラス自身がフローに乗って動く場合に考え、特異ケーラー・アインシュタイン計量を極小一般型代数多様体に構成することに成功した。

一方、米谷-山口、Berndtsson らにより，ベルグマン核の対数多重劣調和性が研究され、半正値曲率カレントを持つ、特異エルミート束の相対随伴直線束のベルグマン核は、全空間が擬凸である場合には、ベルグマン核は対数多重劣調和、即ち相対随伴直線束の特異エルミート計量を与えることが知られていた。

このように特異ケーラー・アインシュタイン計量がケーラーリッチフローを使って構成され、ベルグマン核の変動についての研究が進展していたが、それらを結び付ける方法が、代表者によって発見された。即ち、ベルグマン核の力学系を使って，ケーラー・アインシュタイン計量を構成する方法が代表者により証明されていた。この方法を随伴直線束の場合に拡張することは容易であった。

また J.Song-G.Tian は代表者の研究を発展させ、射影曲面について、ケーラーリッチ流の極限が標準測度の曲率形式になることを示した。彼らは更に、一定の条件下で、標準束が擬正の場合にケーラー・リッチ流の時間大域解が存在することを示している。彼らの方法は、最近の極小モデル理論の進展、即ち標準環の有限生成性を使うものであり、意外性に乏しいものであった。

２．研究の目的

特異ケーラー・リッチ流の大域解の存在と一意性をまず確立し、その解の半正値性を研究することを主目的とした。その動機は、次の予想を証明することにある。

予想：コンパクトケーラー多様体のケーラー族において多重種数はパラメーター空間じょう常に局所定数関数である.

この予想を解くには、相対標準束の上に次の様な計量 h を作ればよい：

(1) ｈは極小特異性を持つ。

(2) ｈの曲率は全空間上半正値である。

ここで極小特異性とは、曲率カレントが半正値になる計量の中で最小の特異性を持つということであり、この場合、特異性はアプリオリに有界な正値関数の掛け算を除いて一意的に定まってしまう。

このような計量を構成するには、ファイバー毎にケーラー・リッチ流を走らせればよいだろうと思われる。なぜなら、もし（相対）ケーラー・リッチ流が曲率の半正値性を保つ場合には、(2)が自動的に成り立つからである。条件(1)については、既に証明済みであった。

３．研究の方法

研究の方法については、エコールポリテクニックの S. Boucksom 氏との共同研究として研究を進めることにした。理由は Boucksom 氏はケーラー・リッチ流の専門家であり、特に複素モンジュ・アンペール方程式の専門家であるからである。特にこの分野では、アメリカとフランスで研究が進んでいる現状があり、フランスの研究チームとの交流が欠かせないと判断した。S,Boucksom 氏との共同研究は、パリに彼を訪ねるか、もしくは東京に Bocuksom 氏を呼んで行ったが、比較的短期の滞在であるにも関わらず、終日ディスカッションができるようにアレンジした。また、本研究期間中、数多くの国際シンポジウムに参加し、特に Toulouse の V.Guedj、A.Zariahi また Grenoble の P.Eyssidieux らとは密接に連絡を取り合い、かなり緊密な情報交換を行った。

4.研究成果

まず。ケーラー・アインシュタイン計量あるいは、捩ったケーラー・アインシュタイン計量をベルグマン核の力学系を使って構成し、これと Berndtsson のベルグマン核の半正値性定理を組み合わせて、ケーラー・アインシュタイン計量あるいは捩ったケーラー・アインシュタイン計量の射影族での半正値性の証明を行った。この部分は、代表者が既に 2006 年に発見したケーラー・アインシュタイン計量のベルグマン核のイテレーションによる構成法と本質的に同じものであり、特に目新しいものではない。

研究の準備として S.Boucksom 氏と共同で、J.Song-G.Tian によるケーラー・リッチ流の時間大域解の構成を見直し、より精密かつ一般的な存在定理を与えておいた。この部分は，勿論新しい結果ではあるが、それほど驚くような結果ではなく、既存の結果のマイナーな改良とでも呼ぶべきもので、特筆に値するものではない。

本研究では、それを発展させて、Boucksom 氏とケーラー・リッチ流についても同様の半正値性定理が成り立つことを、次の手順で証明した。

(1) 差分方程式によるケーラー・リッチ流の近似を行って証明した。即ち、ケーラー・リッチ流の時間を離散化して、(時間) 差分方程式で近似し、複素モンジュー・アンペール型方程式の力学系の形にしておく。

(2) その差分方程式をベルグマン核の力学系で解の構成を行う。

(3) ベルグマン核に関する B.Berndtsson らの対数多重劣調和変動性定理を適用して差分方程式の解が、再び対数多重劣調和変動性を持つことを示す。

(4) 最後に時間差分を０に収束させて、ケーラー・リッチ流が再現できることを示す。

このようにこの方法では、ベルグマン核の変動に関する Berndtsson らの結果と、代表者による複素モンジュ・アンペール方程式の解をベルグマン核の力学系を使って構成する方法を上手く組み合わせることによって証明している．方針はこのように分かり易いが、実行は非常に難しく、かなりの時間を費やして証明を行った。このようなケーラー・リッチ流の半正値性定理は、それ自身、興味深いものであるが、応用として射影代数多様体の射影族に関して、多重種数の変形不変性が証明できることは特筆に値する。しかし、この結果は既知である。

ところが、コンパクトケーラー多様体のケーラー族については、多重種数の変形不変性については未知であり、そのため、コンパクト・ケーラー多様体のケーラー族上のケーラーリッチ流について、射影族と同様の結果を証明することは、それがケーラー多様体についての多重種数の変形不変性の証明に繋がる可能性があるだけに非常に興味深い。従って、コンパクトケーラー多様体の場合のケーラーリッチ流は非常に興味深い研究対象であるといえる。

実際、ケーラー族の場合に射影的な場合と同様にケーラー・リッチ流の半正値性保存則が成り立つことは、非常に確からしい。実際、滑らかなケーラー・リッチ流については G.Schmacher が直接計算により証明を行っている。但し、こういった微分幾何学だけによる手法では、特異性を持ったケーラー・リッチ流については、何も言えない。我々の射影多様体の射影族に関する肯定的な解決の長所は、我々の手法がベルグマン核の対数多重劣調和性というなめらかさを仮定しない射影的でない場合には、アンプル直線束が存在しないので、ベルグマン核の代替物を考えなければ、射影的な場合と同じ様には証明できない。そこで、ベルグマン核の代替物を考える必要がある。その代替物として極値的測度を導入した。

極値的測度は次のように定義される．複素多様体 X を考え、その上の対数多重劣調和な体積形式（逆数が標準束の半正値曲率カレントを持つ特異エルミート計量になるという意味）そのような体積形式の中で全体積が１のものの全体を考え、一点ｘでの極大値をそこでの密度と定義する。このように定義すると、ルロンの古典的な結果により、極値的測度は、それ自身が対数多重劣調和性をもつ体積形式となる。定義から、明らかなように極値的測度はベルグマン体積形式より大きくなる。

極値的測度の優れた点は、それが対数多重劣調和性を持つだけではなく、正閉(1,1)カレントによる捻じれをもつ場合でも同様に定義されることで、これはアンプル直線束を持たないコンパクト・ケーラー多様体の上でもアンプル直線束の代わりに、ケーラー形式を使うことにより，ベルグマン核と同様の力学系を構成することができる。そこで、ベルグマン核の代わりに極値的測度を用いて、ケーラー・リッチ流がコンパクトケーラー多様体の上で再構成できる可能性が出てくる。

さて、このためには、極値的測度が、ベルグマン核の代替物になることを確かめなくてはならないが、それは次のように確かめることができる：

(1) ベルグマン核の力学系の正規化した極限がケーラー・アインシュタイン体積形式になることの類似として、極値的測度の力学系を構成し、その正規化した極限がケーラー・アインシュタイン体積形式となることを証明した。

(2) 擬凸多様体の全空間が擬凸な変形、または射影代数多様体の射影的族の場合に、ベルグマン核と同様に極値的測度の対数多重劣調和変動性が成り立つ。

(3) 極値的測度は、極小特異性を持つ標準束、もしくは随伴直線束の特異エルミート計量を定める。

以上のようなところまではベルグマン核と極値的測度の間には類似性が成り立つ。実際、射影多様体の射影族の場合には、極値的測度を使って、ケーラー・リッチ流の半正値性定理が同様に証明できることが分かる。つまり

射影族に関しては、極値的測度は、ベルグマン核の代替物として完全に機能するのである。

しかしながら、射影でない場合、極値的測度について、対数多重劣調和変動性が証明できていない。これが今後の課題として残された部分である。

また、もう一つ、コンパクト・ケーラー多様体が射影的多様体と異なるのは、ケーラー・リッチ流の大域時間解の存在が不明なことで、これは極小モデル理論がコンパクト・ケーラー多様体において未整備であるからである。つまり特異性を持ったケーラー・リッチ流を構成する場合に、多様体が射影的であれば、予め、その特異性が予見でき、その特異性をもった特異計量をモデルにして解が構成される。それが、コンパクト・ケーラー多様体の場合には、所謂、森理論におけるコーン定理や、縮約定理が存在しないので、予めモデルとなる計量を構成するのが、極めて困難なのである。こうした点で、障害があり、研究期間内には、コンパクトケーラー多様体のケーラー族上でのケーラー・リッチ流について射影的な場合と同様の定理を証明するには至らなかった。　今後の課題として引き続き研究したい。予想としては，ケーラー・リッチ流の特異性は、射影的な場合と同様に、局所射影的なものに限られ、局所的には射影的な縮約やフリップが現れるものと考えられる（実際、3次元までは、最近のT.Petenellらの研究で、そうであることが確かめられている）。

５．主な発.表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. H. Tsuji: On the Extremal Measure on a Complex Manifold, Progress in Mathematics. 308, 159-175.(2015)

2. Tsuji: Some dynamical systems of extremal measures, Proc. of KSCV10, Springer, to appear (2015)

〔学会発表〕（計９件）

1. H.Tsuji: Invariance of plurigenera in Kähler case, Mar. 12, 2015（エコールポリテクニック、談話会）エコールポリテクニック、パリ、フランス

2. H.Tsuji: Stability of canonical systems for compat Kähler families, 複素幾何学, 菅平シンポジウム, プチホテルゾンタック　2014, 11.8.

3. H.Tsuji: Some dynamical systems of extremal measures, KSCV10 慶州 Colone ホテル　Aug. 10 (2014)

4. H.Tsuji: A new invaraiant measure in complex geomety, Kobayashi memorial symposium 東京大学　May 2014

5. H. Tsuji: Semiposity of the canonical measures, Rational points, Rational curves and enire holomorphic curves, CIRM Montreal,, June 23-July 1 (2013) 、モントリオール（カナダ）

6. H. Tsuji: Dynamical systems of extremal measures, Extremal Kähler metrics CIRM Montreal June (2013)、モントリオール（カナダ）

7. H.Tsuji: Construction of canonical singular hermitian metrics on relative canonical bundles, 複素幾何学　菅平シンポジウム　2012. 10.28 、プチホテルゾンタック

8. H.Tsuji: A Schwarz type lemma for canonical measures on the raltive canonical bundles, CIRM workshop Extrema l Kahler metrics May 27-June 1 (2012)　モントリオール（カナダ）

9. H.Tsuji: Construction of canonical singular hemitian metrics on relatvei canonical bundle, KIAS Complex Geometry Symposium May 7-11 (2012)、韓国、ソウル、韓国高等研究所

〔図書〕（計１　件）

1. 辻　元：複素多様体論講義　サイエンス社 (2012)

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

６．研究組織

(1)研究代表者

辻　元(TSUJI Hajime)

上智大学　理工学部・教授

研究者番号：30172000

以上