

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 3 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540093

研究課題名(和文) シンプレクティック商の不変量と諸構造の研究

研究課題名(英文) Study of invariants and various structure of symplectic quotients

研究代表者

高倉 樹 (TAKAKURA, TATSURU)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：30268974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：第一に、重み付きベクトル分割関数に対する一つの明示公式を得た。それは重みが負の場合まで含めて成り立つ。例として、A型ルート系かつ定義域が「良い小部屋」の場合には、重み付きベクトル分割関数・体積関数に対するある公式の別証が得られる。さらにこれは、ある種の超幾何方程式系の解の表示にも応用される。第二に、A型の特殊多重ウェイト多様体を射影空間束の塔として明示的に記述した。その結果、この空間のコホモロジー環が非常に簡明な形に表示される。さらに応用として、A型の特殊ベクトル体積関数を特徴づける微分方程式系が得られた。

研究成果の概要(英文)：First, we obtained an explicit formula for a vector partition function with possibly negative weights. As an example, for the root system of type A, we obtain an alternative proof of certain formulas for the vector partition/volume function over the 'nice chamber.' They are also applied to a presentation of solutions of a certain hypergeometric system. Second, we explicitly described the special multiple weight variety of type A as a tower of projective space bundles. Consequently, the cohomology ring of this space is written down in a very simple form. As an application, we obtained a system of differential equations which characterizes the special vector volume function of type A.

研究分野：幾何学

キーワード：シンプレクティック商 余随伴軌道 旗多様体 ベクトル分割関数 超幾何関数 ウェイト多様体

## 1. 研究開始当初の背景

群の作用をもつシンプレクティック多様体に対し、群作用による単なる商ではなく、運動量写像を用いて記述されるある一部分の商を考えると、再びシンプレクティック多様体になる。これをシンプレクティック商と呼ぶ。各種のモジュライ空間がこのような構成で得られることからその重要性が認識されており、また、シンプレクティック多様体の族を構成的に与える方法としても有効である。

さて、ある種の変換指数を考えることにより、群作用をもつシンプレクティック多様体と、群の表現との対応が得られる。例えば、余随伴軌道(旗多様体)には既約表現が対応する。ここで、空間の等質性が表現の既約性と対応していることに注意する。群の表現においては、各種の操作(直和・テンソル積・対称テンソル積・双対空間、等)が標準的に定まるが、多様体におけるこれらの対応物がやはり自然な形で存在する。例えば、表現のテンソル積には多様体の直積が対応する。さらに、表現の既約分解(特に、各既約成分の重複度)の対応物を与えるのが、作用の運動量写像とシンプレクティック商であることが知られている。

このように、群作用をもつシンプレクティック多様体とその商の構造は、群の表現論と密接に関わる。実際、研究代表者らにより、この問題意識はこれまでいくつかの例において検証されてきた。それらをより包括的な形で発展させたいという動機で、本研究課題を申請した。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、

(1) シンプレクティック商とそのラグランジュ部分多様体を組織的に構成すること

(2) 上記(1)の空間の諸構造を、各種の不変量を用いて明らかにすること

の2つであった。目的(1)は、背景で述べたような、空間と表現のカテゴリカルな対応に着目し、考察すべき「よいクラス」の空間を組織的に構成することを意味する。さらに目的(2)では、対象となるシンプレクティック商やラグランジュ部分多様体の各種の不変量を可能な限り明示的に求めるとともに、大域的な構造を理解することを意図とする。

より具体的な問題・目標としては、

余随伴軌道に付随するシンプレクティック商の不変量の計算と同型類の考察

上記の過程に現れる表現論的・組合せ的構造の考察

各種のシンプレクティック商におけるラグランジュ部分多様体の構成を挙げた。

では、これまでの研究成果を引き継ぎ、コンパクト・リー群の余随伴軌道に付随するシンプレクティック商(重複度多様体、特に極大トーラスによる商の場合は多重ウェイト多様体、と呼ばれる)とともに、複素リー群の余随伴軌道に付随するシンプレクティック商を詳細に調べることを想定した。は、の考察の組合せ論的な部分を取り出したもので、例えば各種の表現の既約分解における重複度(およびその類似)の漸近挙動を明らかにすることを意味する。は、例えば多重ウェイト多様体の場合に限ったとしても非常に興味深い問題である、と考えて提示した。

ト多様体、と呼ばれる)とともに、複素リー群の余随伴軌道に付随するシンプレクティック商を詳細に調べることを想定した。は、

の考察の組合せ論的な部分を取り出したもので、例えば各種の表現の既約分解における重複度(およびその類似)の漸近挙動を明らかにすることを意味する。は、例えば多重ウェイト多様体の場合に限ったとしても非常に興味深い問題である、と考えて提示した。

## 3. 研究の方法

研究目的の達成のために、位相幾何学を専門とし各種の数式処理にも詳しい三好重明氏を研究分担者として研究組織に加えた。

役割分担としては、研究目的欄に述べた具体的な問題・目標のうち、空間の位相的性質の考察および不変量の計算に関するプログラミング・数値計算・数式処理については高倉・三好が担当し、リー群・リー環の表現論に関わる部分を高倉が担当した。また、研究代表者高倉は、研究全体を統括した。

研究を進める上での具体的な方法は、以下の通りである。

(1) 研究期間全体を通じ、本研究課題に関連する研究を行っている各地の研究者を訪問・招聘し、議論と情報交換を行い、研究を深める。

(2) 国内外での関連する研究集会上に積極的に参加し、研究成果を発表するとともに、議論・情報交換と資料収集を行う。同時に、本研究課題を世に問う。

(3) 本研究課題に対する理解を深めるための情報・文献の収集を幅広く行う。

(4) 数値計算・数式処理については、必要に応じて、中央大学・理工学部・数学教室内の計算機室を使用する。

なお、研究経費として申請した諸費用は、すべてこれらの事項の遂行のために用いた。

## 4. 研究成果

(1) 第一に、ベクトル分割関数に対する Brion-Vergne の公式を、重み付きのベクトル分割関数に対して、重みが負の場合まで含めて成り立つ形に一般化した。ベクトル体積関数については、これまでに同様の公式を得ていたが、この結果により、分割関数・体積関数の両方について統一的な一般化が得られたことになる。例として、A 型ルート系かつ定義域が「良い小部屋」の場合には、重み付きベクトル分割関数・体積関数に対する Baldoni-Vergne の公式の別証が得られる。さらにこれは、正整数を指数パラメータにもつ Gelfand-Kapranov-Zelevinsky 超幾何方程式系の解の表示にも応用される。これらの結果は、研究の目的欄に挙げた具体的な問題・目標の に相当する。

(2) 第二に、A 型の特殊多重ウェイト多様体を射影空間束の塔として明示的に記述した。その結果、この空間のコホモロジー環が非常に

簡明な形に表示されることがわかった。さらに応用として、A 型の特殊ベクトル体積関数を特徴づける微分方程式系が得られた。これらの内容は、研究の目的欄に挙げた目的(2)に関する一つの重要な結果とみなされると同時に、組合せ論に対するトポロジーの応用の一例を与えているという点でも意義深い。なお、多重ウェイト多様体の退化に伴う振る舞いを調べることは、派生する問題として興味深い。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文](計1件)

Tatsuru Takakura, On vector partition functions with negative weights, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B39, 2013, pp. 183--195.

##### [学会発表](計11件)

Shigeaki Miyoshi, 「Knots and submersions to the plane on an open 3-manifold」, Geometry Seminar, Instituto de Ciencias Matematicas, Madrid, Spain, 2015年3月10日, 招待講演.

高倉樹, 「同変指数とシンプレクティック商のトポロジーI, II」, 「非可換幾何若手勉強会2015」, 名古屋大学多元数理科学研究科, 2015年3月9, 10日, 招待講演.

Tatsuru Takakura, 「Vector partition functions and the topology of multiple weight varieties」, ICM2014 サテライト研究集会「Topology of torus actions and applications to geometry and combinatorics」, Daejeon コンベンションセンター, 2014年8月8日, 招待講演.

高倉樹, 「ベクトル分割関数と重複度多様体のトポロジー」, 服部先生研究報告会「トポロジーの動向と展望」, 東京大学数理科学研究科, 2014年6月27日, 招待講演.

高倉樹, 「Vector partition functions and the topology of multiple weight varieties」, 東京大学トポロジーセミナー, 東京大学数理科学研究科, 2014年6月3日, 招待講演.

高倉樹, 「An explicit formula for vector partition functions and applications」, 第40回変換群論シンポジウム, 明治大学中野キャンパス, 2013年12月6日, 招待講演.

三好重明, 「結び目を平面への沈め込みの逆像として実現する構成について」, 東北結び目セミナー 2013, 東北大学片平キャンパス, 2013年10月26日, 招待講演.

高倉樹, 「Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties」, 研究集会「Knots, Manifolds and Group Actions」, Adam Mickiewicz University, Slubice, Poland, 2013年9月14日, 招待講演.

高倉樹, 「Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties」, 第60回トポロジーシンポジウム, 大阪市立大学, 2013年8月8日, 招待講演.

高倉樹, 「分配多面体上の積分公式とその応用」, 福岡大学幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2012年11月2日, 招待講演.

三好重明, 「3次元開多様体上の絡み目と平面への沈め込み」, 第59回トポロジーシンポジウム, 佐賀大学, 2012年8月12日, 招待講演.

##### [図書](計0件)

[産業財産権]  
出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

##### 取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
該当なし

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

高倉樹 (TAKAKURA TATSURU)

中央大学・理工学部・教授  
研究者番号：30268974

(2)研究分担者  
三好 重明 (MIYOSHI SHIGEAKI)  
中央大学・理工学部・教授  
研究者番号：60166212

(3)連携研究者  
該当なし