

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540095

研究課題名(和文) ディラック型作用素の局所指数の理論と幾何学的量子化

研究課題名(英文) Theory of local index and geometric quantization

研究代表者

吉田 尚彦 (Yoshida, Takahiko)

明治大学・理工学部・講師

研究者番号：70451903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、これまで古田幹雄氏(東京大学)と藤田玄氏(日本女子大学)との共同研究で得られた Wittenによる作用素の摂動のアイデアに基づく解析的手法による開多様体上のDirac型作用素の指数理論について、指数のコボルディズム不変性を考察し、指数を定義する際に用いた付加構造に指数がどの程度依存するか研究を行った、また、我々の理論のK理論などを用いた定式化について研究を行った。さらには、先行結果との関連を調べ、他分野への応用を図った。

研究成果の概要(英文)：For the previous joint work with M. Furuta and H. Fujita on an index theory for Dirac type operators on possibly non-compact Riemannian manifolds based on the idea of Witten's deformation, I investigated the dependence of the index on additional geometric structures which are used to define the index from the viewpoint of the cobordism. I also investigated the formulation of our theory by using the K-theory. Furthermore I investigated the relationship between other researches and ours, and applied our index theory to geometric quantization and other research area.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：解析的指数 Witten摂動 局所化 幾何学的量子化

1. 研究開始当初の背景

前量子化束付き閉シンプレクティック多様体の特異ファイバーを許容する Lagrange ファイバー束の全空間であるとき, Spin^c Dirac 作用素の指数が Bohr-Sommerfeld ファイバー (以下 BS ファイバー) の個数と一致する現象が様々な例で知られている. Spin^c Dirac 作用素の指数と BS ファイバーはそれぞれ Spin^c 量子化と実偏極を用いた幾何学的量子化における量子 Hilbert 空間の次元であるので, この現象はこの二つの量子化が量子ヒルベルト空間のレベルでは等価であることを示している.

この現象は, Spin^c Dirac 作用素の指数が BS ファイバーの近傍への局所化現象と見ることができ. これについて私は, これら一連の局所化現象を引き起こす普遍的な原理を解明したいと考え, 古田幹雄氏 (東京大学), 藤田玄氏 (学習院大学) との共同研究において, BS でないファイバーの解析的な特徴付けを抽象化した acyclic compatible system という構造を導入し, コンパクトな部分以外に acyclic compatible system がある閉多様体とは限らない Riemann 多様体とその上の Z_2 次数付き Clifford 加群束に対して, これを用いて Dirac 作用素を摂動することによって局所指数を定義し, 切除性, 張り合わせ公式, 積公式などの性質が成り立つことを証明した. 特に, 閉多様体の場合, 局所指数は Dirac 型作用素の指数と一致するという性質があるので, この性質と切除性から指数の局所化公式が得られる. ある状況については, この局所化公式を適用することにより, Spin^c Dirac 作用素の指数が BS ファイバーの個数と一致することを証明できた. また, 局所指数の理論をトーラス作用がある場合に二通りの同変版に精密化した. その応用として, 前量子化可能なシンプレクティック多様体上のトーラス作用に対して, シンプレクティック簡約と量子化の操作が可換であることを

意味する量子化予想の別証明を得た.

2. 研究の目的

局所指数は, acyclic compatible system を用いて Dirac 作用素を摂動し, その解析的指数として定義される. しかし, 局所指数が acyclic compatible system の取り方にどの程度依存するのか分かっていなかった. また, 局所指数は, 一般には定義に基づいて計算をすることが困難であり, このことが局所指数の理論の応用を考える際に大きな障害となっていた.

これらを踏まえて, 本研究は次を目的とする.

- ・ 局所指数が acyclic compatible system の取り方にどの程度依存するのかを明らかにし, 局所指数を計算する組織的な方法を開発すること.
- ・ 局所指数の K 理論などを用いた定式化を与えること.
- ・ 局所指数の理論を幾何学的に理解すること.

3. 研究の方法

について, acyclic compatible system がふたつあった場合に これらにどのような関係があれば得られる局所指数が一致するか, 偶数次元トーラスやトーリック多様体などの扱い易い対象についてはじめに考察をする. また, これらの例を元にして, 局所指数の計算方法も探る.

について, 閉多様体上の Dirac 型作用素に対する局所指数の指数定理と幾何学的量子化への応用について研究をする. 指数定理の証明には, コボルディズム理論, K 理論や熱核を用いる方法などが知られているが, 幾何学的量子化におけるノンコンパクトなシンプレクティック多様体に関する Paradan や Hoch-Landsman らの先行結果を考慮し, K 理論を用いた方法の一般化を探る. さらに,

特異ファイバーを持たない Lagrange ファイバー束や Hamilton S^1 作用など acyclic compatible system が単純な場合に, 局所指数の K 理論を用いた定式化を探る.

閉多様体上の楕円型微分作用素の指数を計算する有効な手段の 1 つに, コンパクト Lie 群作用のある場合の同変指数に対する Lefschetz の公式を用いる方法がある. 局所指数についても S^1 作用がある場合にこの公式を一般化し Hamilton S^1 作用へ応用する.

について, 我々の先行研究における Dirac 型作用素の摂動は人工的であるため, 上の計画を遂行しようとするどこかに無理が生じる可能性がある. これを克服する為には, 開 Riemann 多様体上の Dirac 型作用素の指数について現在よりも自然な定式化が必要になると思われる. この点について, この摂動はすでに幾つかの例の考察によりファイバー方向の計量を小さくする Riemann 計量の変形と関係があることが明らかになりつつあるので, 上の計画と平行して具体例による考察を押し進め, 我々の摂動とこの計量の変形に関する断熱極限の関係を明確にする.

4. 研究成果

について, 2 次元シリンダーの例を考察することによって, 二つの acyclic compatible system から定まる局所指数が一致するためのひとつの十分条件を得た. また, acyclic compatible system が二通りある場合にそれぞれを用いて定義される局所指数の関係をコボルディズム不変性の観点から考察を行った. さらにその応用として, 非特異射影的トーリック多様体の同変 Riemann-Roch 指数に関する Danilov の定理の局所指数の理論を用いた別証明を与えた.

局所指数の理論を幾何学的量子化に応用するためには, さまざまな例について局所指数を具体的に計算する手段が必要になる. そ

こで, 複素旗多様体上の測地流の零点の局所指数を計算した. その過程で, $U(1)$ 作用のシンプレクティックカットのカットローカスの同変局所指数を計算する手段を確立した.

について, 非可換幾何学の専門家から C^* 環や K ホモロジーについての専門知識の提供を受け, 特異ファイバーを持たない Lagrange ファイバー束の場合にこれまでに得られた局所指数の K ホモロジーなどを用いた定式化について考察を行った.

に関連して, acyclic compatible system は互いに反交換子が非負であるような作用素の族であった. この条件は, 局所指数が well-defined であるための十分条件であるが, 応用を考える際に非常に扱いづらい条件であった. そこで, この条件をより扱いやすい条件に置き換えることが出来ないか, 具体例で曲率の評価の観点から考察を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

藤田 玄, 古田 幹雄, 吉田 尚彦,
Torus fibrations and localization of index III, Communications in Mathematical Physics 327 (2014), 665-689. 査読有
DOI:10.1007/s00220-014-2039-4

藤田 玄, 古田 幹雄, 吉田 尚彦,
Torus fibrations and localization of index II, Communications in Mathematical Physics 326 (2014), 585-633. 査読有
DOI:10.1007/s00220-014-1890-7

吉田 尚彦, A formula for the

equivariant local index of the reduced space in the symplectic cutting, MIMS Technical Report00044 (2014). 査読無
<http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/2013/abst00044.pdf>

吉田 尚彦, *Equivariant local index*, 京都大学数理解析研究所講究録別冊 B39, 2013, 215-232. 査読有
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B39-contents.pdf>

藤田 玄、古田 幹雄、吉田 尚彦, *Geodesic flows on spheres and the local Riemann-Roch numbers*, UTMS Preprint Series 2012-12. 査読無
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/preprint/pdf/2012-12.pdf>

[学会発表](計6件)

吉田 尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, Mini-workshop on Topological State and Non-commutative Geometry, 東北大学原子分子材料科学高等研究機構(宮城県仙台市) 2015年3月25日.

吉田 尚彦, ICM2014 Satellite Conference "Torus fibrations and localization of index", Topology of torus actions and applications to geometry and combinatorics, 太田(韓国) 2014年8月10日.

吉田 尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, International Conference Mathematical New Goals, 台南(台湾) 2014年7月1日.

吉田 尚彦, *Equivariant local index*

and symplectic cut, The 5th International Conference on Geometry and Quantization, ウィーン(オーストリア) 2013年8月30日.

吉田 尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, UK-Japan Mathematical Forum, 慶應義塾大学(神奈川県横浜市) 2013年1月26日.

吉田 尚彦, *Torus fibrations and localization of index*, 信州トポロジーセミナー, 信州大学(長野県松本市) 2012年12月7日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~takahiko/>

6．研究組織

(1)研究代表者

吉田 尚彦 (YOSHIDA, Takahiko)

明治大学・理工学部数学科・専任講師

研究者番号：70451903

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：