4版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００９７
研究課題名（和文）変形量子化による非可換関数等式とその応用

研究課題名（英文）Noncommutative functional identites with non formal deformation quantization and its application

研究代表者
吉岡　朗（Yoshioka, Akira）

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：４０２００９３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：　変形が収束べき級数であるような変形量子化を研究した。得られた変形量子化代数における非可換指数関数の性質を詳しく調べた。この指数関数を用いて様々な非可換関数等式を考察した。その応用として、具体的なMICケプラー問題の固有値問題、シンプレクティック簡約化を詳しく調べた。さらにこれをもとに、作用する群が可換である時の収束べき級数のS1非可換簡約化の一般的な公式を得た。
　非可換指数関数の応用として真空元から変形量子化代数の表現が得られることをそのアルゴリズムも含めて明確にした。

研究成果の概要（英文）：　We consider non-formal deformation quantizaztion. In the obtained star product aligebra, we consider star exponntaials. Using the star exponentials, we can construct certain noncommutative functional identites. As an application, we investigate a concrete MIC-Kepler problem, its eigenvalues, and also its noncommutative symplectic reduction, with non formal star products. Based on the investitation on the MIC-Kepler problem,we extend the noncommutative reduction to general situation with S1 symmetry group.
 Using star exponentials,we also obtain vacumms, with which we can obtain representation of non-formal star product algebras.

研究分野：シンプレクティック・ポアソン幾何学、変形量子化

キーワード：変形量子化　シンプレクティック幾何学　ポアソン幾何学　非可換幾何学　量子化　力学

１．研究開始当初の背景

変形量子化(deformation quantization)とは，ポアソン多様体上の関数空間において，通常の可換積を非可換で結合的な積に変形することをいう．これは，量子力学における「量子化・古典極限」の指導原理を自然な形で理解するため，1970 年代末に Bayan-Flato-Fronsdal-Lichnerowiz-Sternheimer ([B (1978)]) らの数理物理学者により提唱された概念である．

変形量子化の存在と分類の問題が，Dewilde-Lecomte ([DL (1983)])，大森－前田－吉岡 ([OMY (1991)])， Fedosov ([F (1994)]) らによってシンプレクティック多様体の場合に解決され，その後，Kontsevich ([K (2003)]) により一般のポアソン多様体の場合にも解決され，その数学的な基礎が固まった．

現在，場の量子論・弦理論，非可換幾何学などにおいて，多様体上に種々の非可換代数を与えるための基本的なアイデアとして，多くの研究者により研究されている．しかしながら，現在までの研究は，変形のパラメータに関する形式的べき級数の枠内で行われるため，得られる情報が本質的に形式べき級数の代数的な関係にとどまり，幾何学的・解析学的に深い理解を得るためには限界がある．

このような背景においてこれまでの研究経緯としては次のことを行ってきた。

(1)形式的べき級数ではなく収束するべき級数で考えるために，積が定義される Fr'echet 空間の族を設定し，その性質をしらべた(cf. [OMMY (1999)])

(2)位相代数の完備性を用いて非可換指数関数を得た．特に 2 次元複素平面上の 2 次の非可換多項式の非可換指数関数の集合は，リー群 SL(2, C)に非常に似た性質を持つが，非可換性のために，これとは異なる Hitchin らにより研究された gerbe の構造を有することを示した([OMMY (2003)]).

(3) 非可換 2 次式の非可換指数関数を用いて，非可換な関数を考察した．たとえば正弦関数，余弦関数，Gamma 関数，Beta 関数などの定義式に素朴に非可換指数関数を代入してこれらの非可換版を与え，いろいろな関数等式を導いた．また，非可換正弦関数の無限積，Laplace 変換に対応する積分を用いて非可換多項式の逆元を得た（cf. [OMMY (2007)]).

(4) さらに複素対称行列をもちいて変形量子化の族を考える．これらの積はワイル代数の表現の変形を与え，それぞれの積に関する１次式の指数関数を用いてテータ関数のみたす関数等式を自然に導くことができた．また表現の変形の自由度を用いて種々の関数等式を導いた([IY (2010)]).

２．研究の目的

このような状況にあって，本研究はその全体構想として，変形のパラメータに関し収束するべき級数を基礎にして理論を構成し，具体的な対象の非可換化を詳しく調べ，幾何学および解析学に対して意義ある情報を引き出す枠組みを目指してゆく。すなわち、種々の具体的な特殊関数，テータ関数，楕円関数，超幾何関数などの変形量子化版を定義し，それらの満たす関数等式を研究する。

(1) 逆元を利用し，具体的な対象としてアイゼンシュタインの与えた種々の二重周期関数の変形量子化版を考える。特に非可換指数関数の特異性のためにおこる現象を幾何学的な視点から調べる．

(2) 水素原子の束縛状態をラゲール多項式の関数等式を用いて変形量子化で扱うことが出来ることは知られている．これを磁場のかかった場合に拡張する．さらにその拡張として複素射影空間上のボホナーラプラシアンに対しても同様の考察を行う．シンプレクティック幾何学における，運動量写像を用いたシンプレクティック簡約の方法を用いて研

究する．

(3) 変形量子化代数において微分積分を行うことが出来，したがってこの位相代数においていろいろな微分方程式を解くことが出来る．１次式および２次式の変形量子化による指数関数を用いて超幾何関数の変形量子化版を定義し，その性質を調べる．また，いままでの研究で得られた種々の等式との関係を調べる．

さらに，これらの非可換関数等式が変形量子化代数の下部構造であるポアソン代数に誘導する関係式を通じて，非可換関数等式の幾何学的な意味を研究する。

収束するべき級数を用いての変形量子化の研究はほかには行われていない．この意味でいままでに研究されていない新しい視点と方向性を持っているといえる。さらに本研究によって得られる等式はすべて，従来の形式的べき級数の枠組みでは得られない，本質的に収束べき級数の理論による新しい結果である。

関数の非可換化を行ったとき，可換な場合と同じ等式が成り立つことと非可換で初めて得られる等式があることを，具体的な計算例を通じて認識することは重要である。このような基礎的な知見を一つ一つ積み上げていくことは，関連する分野の今後の研究にとり，意義あるものと思われる．また，最近はこの研究に触発されて，形式的べき級数の枠ではなくパラメータが数であるとして，変形量子化を考えた研究などが出てきた．この意味で，本研究はこれらの流れを先導し，これからのひとつの方向性と可能性を与えていくことを目指していきたい。

文献

[B (1978)] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I, II, Ann. Physic 111(1978) 61--110, 111--151.

[DL (1983)] M. DeWilde, P. Lecomte, Existence of star-products and of formal deformation of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, Lett. Math. Phys. 7(1983), 487--496.

[F (1994)] B. Fedosov, Simple geometrical construction of deformation quantization, J. Differential. Geom. 40(1994), 213--238.

[K (2003)] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. 66(2003), 157--216.

[OMY (1991)] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka. Weyl manifolds and deformation quantization, Adv. Math. 85(1991), 224--255.

[OMMY (1999)] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, Deformation quantization of Fr'echet-Poisson algebras: Convergence of the Moyal product. The proceedings of the Confence Moshe Flato 1999, Kluwer Academic Publishers in the series Mathematical Physics Studi es vol. 2, 233--246.

[OMMY (2003)] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, Strange phenomena related to ordering problems in quantization, Journal of Lie Theory, 13 (2003), 481--510.

[OMMY (2007)] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, Orderings and non-formal deformation quantization, Letters in Mathemtical Physics, 82 (2007), 153--175.

[Y (2007)] A. Yoshioka, Family of star products and its application, AIP conference proceedings, 956 (2007), 37--42.

[IY (2010)] M. Iida, A. Yoshioka, Star products and applications, J. Geom. Symmetry Phys. 20 (2010), 49--56.

３．研究の方法

研究目的を達成するため，はじめに，個々の関数と系、たとえばアイゼンシュタインの級数，磁場のかかった水素原子および複素射影空間のボホナーラプラシアンなど研究を行った。

次に，超幾何関数の変形量子化版を導入し，全体の関係を見る．さらに，得られた等式について幾何学的な立場から総合的な考察を行った。

これらを進めるにあたって、国内外の非可換幾何学・数理物理学・解析学等の研究者と研究打ち合わせおよびセミナーを行った。さらに、国内外の学会に参加するとともに，関

連する国内外の研究者と協力して，各年度に，国内で研究会を一回，国外で研究会を一回程度行い，専門分野・隣接分野の研究者とも広く交流し，得られた結果の発表を行った。応用的な側面に関しては，いままでの研究により得られた２次の非可換多項式の指数関数の等式を基礎にし、べき級数と特殊関数の母関数の関係を利用して研究を行った。さらに、物理数学で得られている諸公式と変形量子化の関係を具体的に書き上げることなどの研究を行った。

４．研究成果

(1) 変形量子化を用いてアイゼンシュタイン級数の拡張に関するいくつかの結果を得た。特にその特別な場合である三角関数の級数表示の拡張を得た。変形量子化を用いることにより、アンドレ・ヴエイユの与えた分数式の無限和による方法がそのまま直接的に拡張できることが分かった。
(2) 磁場のかかった水素原子のエネルギー固有値とその重複度の研究を行い予定通り結果に到達した。変形量子化により運動量写像を用いて古典的な簡約化と並行に議論を進めることが可能であると判明した。
(3) 具体的な力学系に対する変形量子化の応用として、対象とする古典力学系がリー群作用の簡約化により与えられる場合を研究した。配位空間が単位円周のリー群を構造群とする主ファイバー束の構造を持つとき、そのリー群作用は対称性のリー群作用として相空間に拡張される。この相空間上のリー群作用で不変なハミルトン関数は、いわゆるMarsden－Weinstein の簡約化理論 (reduction theory) により簡約化シンプレクティック多様体上の力学系を誘導する。これは古典力学系の理論であるが、変形量子化理論を用いて対応する量子系に対して簡約化を行う、いわばMarsden－Weinstein の簡約化 (reduction) 理論の量子化を具体的な系に対して研究し結果を得た。配位空間として４次元ユークリッド空間、リー群は上記の単位円周のリー群、リー群作用で不変な力学系は８次元相空間上の自由度４の調和振動子を考える。対応する簡約力学系は水素原子を特殊な場合として含む MIC-Kepler problem である。この８次元相空間上に自然にモイアル積による非可換代数を考えることが出来る。簡約化シンプレクティック多様体上の関数により生成された部分代数に対し、リー群作用の運動量写像により生成される両側イデアルによる同値類をとることにより、簡約化シンプレクティック多様体上の非可換代数が得られる。この非可換代数から簡約化シンプレクティック多様体上の変形量子化を得た。この方法は、形式的べき級数を用いる従来の議論とは本質的に異なるものであり、形式的べき級数ではない変形量子化に対する量子的簡約化はこの結果が初めてであるといえる。
(4) 変形のパラメータが形式的べき級数をあたえる形式的なパラメータではなく、収束べき級数をあたえる実数の場合にシンプレクティック簡約化の一般論は作られていない。一方、形式的べき級数論の枠組みでは、すでに Fedosov らによってアルゴリズムが作られている。これに対し、変形パラメータが実数、作用する群が単位円周である可換リー群、シンプレクティック多様体がファイバーが単位円周のリー群である主ファイバー束の余接束である場合に量子シンプレクティック簡約化のひとつの構成法を与えた。具体的な例として今までに MIC ケプラー問題について量子シンプレクティック簡約化を構成したが、これを具体的な場合として含む一般論が出来たといえる。これを束から一般のシンプレクティック多様体に拡張することも考察した。
(5) 非可換指数関数の特異点に関する研究を行い、様々な結果を得ることが出来た。２次

形式の非可換指数関数の特異点の周りでの１周積分から真空状態と呼ばれる元が得られるそれから変形量子化代数の表現が得られることを示した。その具体的応用としてMIC ケプラー問題の基本解のグリーン核を変形量子化から構成できることを示し、さらにこれが一般の単位円によるリー群の量子シンプレクティック簡約化により得られる系に対しても一般化が可能であることを示した。

(6)変形が形式的べき級数である場合について、ホッホシルト協会作用素を用いて構成する方法、ワイル代数束を用いて構成する方法、さらに変形が形式的べき級数ではない場合の構成法など、今までに知られている構成法をまとめなおして、研究会、セミナーなどで発表および解説を行い、未解決問題などに関して新しい視点を提示した。

.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Deformation of expression for elements of an algebra, Symplectic,Poisson and Noncommutative Geometry, Mathematical Research Institute Publication, 査読有, Vol. 62, 2014, 170-209,http://www.cambridge.org/jp/academic/subjects/mathematics/geometry-and-topology/symplectic-poisson-and-noncommutative-geometry

② Tomoyo Kanazawa, Akira Yoshioka,An S1 reduction of non-formal star product, Geometry, integrability and quantization, 査読有, Vol. 15, 2014,162-172.DOI:10.7546/giq-15-2014-162-172

③ Mari Iida, Chishu Tsukamoto, Akira Yoshioka, Star product and certain star functions, Geometric methods in Physics, XXXIth workshop 2012, Trends in mathematics, 査読有, 2013, 39-45. DOI:10.1007/978-3-0348-0645-9

〔学会発表〕（計　11　件）

① Akira Yoshioka, Star product and Weyl manifold, (招待講演),Current problems in Theoretical Physics XXI edition, 2015年3月28日～3月31日, Vietri,Italy.

② 吉岡　朗, Star product and application, (招待講演), (非)可換代数とトポロジー, 2015年2月13日～2015年2月15日, 信州大学, 松本市

③ Akira Yoshioka, Star functions, example and application, (招待講演),XXXIIIth workshop on Geometric methods in Physics, 2014年6月29日～2014年7月5日,Bialowieza, Poland.

④ Akira Yoshioka, Star product and star functions, XVIth international conference on Geometry, integrability and quantization, 2014年6月6日～2014年6月11日,Varna, Bulgaria.

⑤ Akira Yoshioka, Star product and its application, (招待講演), International Conference. Symmetry methods, applications, and related fields, celebrating the work of Professor George Bluman, 2014年5月13日～2014年5月16日,Unversity of British Columbia, Vancouver, Canada.

⑥ Akira Yoshioka, Star products, star exponentials and applications, (招待講演),XXXIIth workshop on Geometric methods in Physics, 2013年6月30日～2013年7月6日,Bialowieza, Poland.

⑦ Akira Yoshioka, Star product and star exponentials, XVth international conference on Geometry, integrability and quantization, 2013年6月7日～2013年6月12日,Varna, Bulgaria.

⑧ 吉岡　朗, Star 積について, (招待講演), 場の数理とトポロジー, 2013年2月6日～2013年2月8日, 信州大学, 松本市

⑨ Akira Yoshioka, Star products and star functions, (招待講演),International conference, Harmonic Analysis on homogeneous spaces and quantization, 2012年10月14日～2012年10月21日,Tambov University, Tambov, Russia.

⑩ Akira Yoshioka, Star products-formal extension and nonformal extension, (招待講演),XXXIth workshop on Geometric methods in Physics, 2012年6月24日～2012年6月30日,Bialowieza, Poland.

⑪ Akira Yoshioka, Star products-formal and nonformal, XIVth international conference on Geometry, integrability and quantization, 2012年6月8日～2012年6月13日,Varna, Bulgaria.

〔図書〕(計　3　件)

① Akira Yoshioka, 他, Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of XVI th International conference on Geometry,Integrability and Quantizaion, 2014,300.

② Akira Yoshioka, 他, Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of XV th International conference on Geometry,Integrability and Quantizaion, 2013,321.

③ Akira Yoshioka, 他, Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, Proceedings of XIV th International conference on Geometry,Integrability and Quantizaion, 2012,271.

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

吉岡　朗 (Yoshioka, Akira)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：40200935

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

大森　英樹 (Omori, Hideki)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号： 20087018

前田　吉昭 (Maeda, Yoshiaki)
東北大学・理学部・教授
研究者番号：40101076

宮崎　直哉 (Miyazaki, Naoya)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：50315826