2版

様 式 C－19、F－19－1、Z－19 （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４５４００９８
研究課題名（和文）標準ケーラー計量、代数幾何的安定性と佐々木幾何

研究課題名（英文）Canonical Kahler metrics, algebro-geometric stability and Sasakian geometry

研究代表者
小野　肇（ONO, Hajime）

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：７０４６７０３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：「体積最小性」の観点をもとに、トーリック幾何学を通じて、代数幾何学（幾何学的不変式論におけるいくつかの安定性概念の判定）、部分多様体論（ラグランジュ部分多様体のハミルトン体積最小性の問題）、標準計量の存在問題（共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の二木不変量の計算）など様々な問題を統一的に扱い、それらについて新しい知見を与えた。

研究成果の概要（英文）：Based on a viewpoint of “volume minimization property”, we improved knowledge on the following topics for toric Kahler manifolds: algebraic geometry (GIT stability and K-stability), submanifold theory (Hamiltonian volume minimization problem of Lagrangian submanifolds) and existence problem of canonical metrics (Futaki type invariants on conformally Kahler Einstein-Maxwell metrics).

研究分野： 微分幾何学

キーワード： トーリック幾何　チャウ安定性　K-安定性　ハミルトン体積最小性　ラグランジュ部分多様体　共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量

１．研究開始当初の背景

（１）ケーラー多様体の幾何学を研究する上で、標準的なケーラー計量（例えばケーラー・アインシュタイン計量やスカラー曲率一定ケーラー計量）の存在問題は最も重要な問題の１つである。この問題に関して、次の Yau, Tian, Donaldson による予想が長い間未解決であった「偏極多様体(M,L)があたえられたとき、L の第１チャーン類の中にスカラー曲率一定ケーラー計量が存在することと、(M,L)が代数幾何的な意味で安定であることは同値であろう」。特に、代数幾何的な安定性の概念には様々なものが存在し、上の予想において適切な安定性概念も完全に確定していたわけではなかった。

（２）二木昭人氏（東京大学）、Guofang Wang 氏（University of Freiburg）との共著論文「Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, Journal of Differential Geometry, 83 (2009), pp 585-635」および二木氏、趙康治氏（九州大学）との共著論文「Uniqueness and examples of compact toric Sasaki-Einstein metrics, Comm. Math. Phys. 280 (2008), pp 439-458」により、トーリック佐々木・アインシュタイン計量の存在と一意性の問題について解決しており、その際に用いた佐々木幾何の手法（ケーラー錐の複素代数幾何学、体積最小化）が Yau-Tian-Donaldson 予想を考える際にも有効であると考えられた。実際、この手法により、二木氏、佐野友二氏（福岡大学）との共著論文「Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Adv. Math., 226 (2011), pp 254-284」で、漸近的チャウ半安定性の障害（一般化された二木不変量）とヒルベルト級数の関係を与え、それをもとに、佐野氏、四ツ谷直人氏（名古屋大学）との共著論文「An example of an asymptotically Chow unstable manifold with constant scalar curvature, Annales de l'institut Fourier, 62 (2012), pp 1265-1287」で、漸近的チャウ不安定なケーラー・アインシュタイン多様体の例を発見した。この発見により、Yau-Tian-Donaldson 予想において漸近的チャウ安定性は不適であることが明確になった。

２．研究の目的

本研究の目的は大きく分けて次の２つである。

（１）佐々木幾何的手法（ケーラー錐の複素代数幾何学、体積最小化）はケーラー多様体の幾何学にある意味超越的な視点を与え、今までのケーラー幾何にはない新しい知見を与える枠組みである。そこでこの手法を通して適切な代数幾何的な安定性概念を明確にし、Yau-Tian-Donaldson 予想の解決を目指す。

（２）佐々木多様体に関しても同様の予想（佐々木版 Yau-Tian-Donaldson 予想）が成立することが期待される。そこでまず、佐々木多様体の代数幾何的な安定性の概念を、ケーラー錐の複素代数幾何学をもとに定式化し、佐々木・アインシュタイン計量やスカラー曲率一定佐々木計量の存在との関係を明らかにする。

３．研究の方法

偏極多様体の座標環およびその上の無理数次数付けを考えることは、ケーラー錐の代数幾何的な構造を考えていることにあたる。そこで本研究では偏極多様体(M,L)の座標環（無理数次数付き環）の漸近解析を軸に、適切な代数幾何的安定性概念を定式化する。

（１）L の第１チャーン類にスカラー曲率一定ケーラー計量が存在すると、標準的な次数付けに関して、座標環に定量的な制限が加わる（ヒルベルト級数に関する``最小化``）佐々木多様体の場合（標準的ではない次数付けに対応する）にも同様である。そこで、標準計量が存在する場合に、座標環（無理数次数付き環）がどのような定性的な性質をもつか調べ、それにより適切な安定性概念について考察する。

（２）代数幾何的安定性の最有力候補は K-安定性である。この概念を定義するにはテスト配位（退化する偏極多様体の族）が必要である。Szekelyhidi は次数付き環のフィルトレーションをテスト配位の一般化とみなして K-安定性をあらためて定式化した。そこで、Szekelyhidi の K-安定性を無理数次数付きの環の場合に一般化し、特に、標準佐々木計量との関係を探る。

４．研究成果

主な成果は以下の３つである：

（１）偏極トーリック多様体のチャウ安定性および K-安定性の判定条件の解明およびその応用：ケーラー・アインシュタイン計量に関する Yau-Tian-Donaldson 予想が Tian, Chen-Donaldson-Sun らにより肯定的に解決された（2012 年）。また、佐々木・アインシュタイン計量についても Collins-Szekelyhidi により解決がアナウンスされた（2015 年）。（後者はまさに上の「研究の方法」で挙げたアイデアが用いられた。）したがって、ケーラー・アインシュタイン計量の存在問題に関しての未解決な点は、与えられたファノ多様体がいつ K-安定になるか判定することである。先行研究として論文「A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds, J. Math. Soc. Japan, Vol. 63 (2011), pp 1377-1389」においてすでにトー

リック偏極多様体の（漸近的）チャウ安定性に関する結果を得ていたので、その知見をもとに、論文②において、トーリック偏極多様体のK-安定性を、対応するDelzant多面体上の凸-piecewise アファイン関数を用いて明示した。また、一般にはK-安定性は漸近的チャウ安定性を導かないが、トーラス作用に関する不動点の個数が6以下の偏極トーリック曲面に対して、K-安定性と漸近的チャウ安定性は同値であることも示した（〔学会発表〕の⑩、⑪で発表した。）

Yau-Tian-Donaldson予想の解決により、研究内容の変更を余儀なくされた。以下の２つの成果（特に（２））は当初の研究目的とは一見異なるものに見える。しかし、どちらの内容も Yau-Tian-Donaldson 予想の類似問題（Donaldson-藤木型モデルにより予想される、偏微分方程式の解の存在とある種の安定性概念の同値性）がその根底にあり、その定式化への第一歩として重要な意義がある。

（２）トーリックケーラー多様体のラグランジュトーラスファイバーの非ハミルトン体積最小性の解明：トーリックケーラー多様体のラグランジュトーラスファイバーは平坦トーラスであり、無限小ハミルトン変形のもと体積の第一変分が消える（ハミルトン極小なラグランジュ部分多様体)。特に、複素ベクトル空間や複素射影空間については体積の極小性（ハミルトン安定性）が示されていた（後者については代表者の論文「Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds, Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 31 (2007), pp 329-343」）さらに 1 次元複素ベクトル空間および複素射影直線の場合は等周不等式により、それらはハミルトン変形のもと体積最小であることがわかる。その自然な一般化として、複素ベクトル空間ならびに複素射影空間のラグランジュトーラスファイバーはハミルトン変形のもと体積最小であると予想されてきた。しかし、論文①において次の 3 点を証明した：(i) 3 次元以上の複素ベクトル空間内のほとんど全ての標準ラグランジュトーラスはハミルトン体積最小ではない (ii) 3 次元以上の複素射影空間のほとんど全てのラグランジュトーラスファイバーはハミルトン体積最小ではない (iii) 3 次元以上の任意のコンパクトトーリック多様体にはハミルトン体積最小ではないラグランジュトーラスファイバーが存在する。

また、複素射影空間のラグランジュトーラスファイバーのハミルトン安定性から、「トーリックケーラー・アインシュタイン多様体のラグランジュトーラスファイバーはハミルトン安定か?」という問題も考えられるが、この問題について、上述の論文で確立した手法をもとに検討した結果、否定的な解答を得た。

（３）共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の存在問題：アインシュタイン計量はリッチ曲率が一定なリーマン計量として定義されるが、同時にアインシュタイン・ヒルベルト汎関数の臨界点としての特徴づけも持つ。その物理的に重要な１つの一般化として、アインシュタイン・ヒルベルト汎関数に電磁場（2 次微分形式）のマックスウェル汎関数を合わせたものに関するオイラー・ラグランジュ方程式であるアインシュタイン・マックスウェル方程式が良く知られている。アインシュタイン・マックスウェル方程式の解の幾何学的意味はアインシュタイン計量に比べるとあまり明確ではなく、数学の研究対象としては今まであまり注目されていなかった。しかし、Apostolov-Calderbank-Gauduchon と LeBrun による、複素曲面上のアインシュタイン・マックスウェル方程式の強エルミート解に関する研究により、ケーラー幾何と密接な関連があることが明らかになってきた。そして、2015年に強エルミート解の高次元化として、Apostolov-Maschler により共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の概念が定義された。彼らはDonaldson-藤木型モデル（無限次元のモーメント像）を用いて共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の存在問題をうまく定式化し、有限次元の幾何学的不変式論やケーラー幾何での議論をもとに、共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の存在の障害（cKEM-二木不変量）を定義した。

代表者は二木氏とともに共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の存在問題に取り組み、次の結果を得た：(i) Apostolov-Maschler は高次元で非ケーラーな共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量の例は与えていなかった。我々は任意の次元でそのような例を構成した（スカラー曲率一定ケーラー多様体を１つ与えるごとに例が１つ出来る)。(ii) ケーラー・リッチソリトンや佐々木・アインシュタイン計量の存在問題の状況との類似性に着目し、cKEM-二木不変量が体積関数の第一変分に等しいことを証明した。また、それを用いていくつかのトーリック曲面（複素射影平面、その１点ブローアップ、ヒルツェブルフ曲面）に対して cKEM-二木不変量を計算し、それがいつ消えるかを特定した。
（以上は〔学会発表〕①で発表した。）

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
①Hiroshi Iriyeh, Hajime Ono, Almost all Lagrangian torus orbits in CP^n are not

Hamiltonian volume minimizing, Annals of Global Analysis and Geometry, 査読有, July 2016, Volume 50, Issue, pp 85-96, DOI: 10.1007/s10455-016-9504-6

② Hajime Ono, Algebro-geometric semistability of polarized toric manifolds, Asian Journal of Mathematics, 査読有, Volume 17 (2013), Number 4, pp 609-616,
DOI:
http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2013.v17.n4.a3

〔学会発表〕(計１１件)
① Hajime Ono, Volume minimization principle for conformally Kaehler Einstein-Maxwell metrics, The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry, 2016年12月17日, 早稲田大学（東京都・新宿区）

② 小野肇, トーリックケーラー多様体のラグランジュトーラス軌道の非ハミルトン体積最小性について, 2016年度福岡大学微分幾何研究会, 2016年11月5日, 福岡大学（福岡県・福岡市）

③ 小野肇, トーリックケーラー多様体のラグランジュトーラス軌道の非ハミルトン体積最小性について， 部分多様体幾何とリー群作用2016, 2016年9月1日, 東京理科大学（東京都・新宿区）

④ 小野肇, 入江博, Almost all Lagrangian torus orbits in CP^n are not Hamiltonian volume minimizing, 2015 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月13日, 京都産業大学（京都府・京都市）

⑤ 小野肇, トーリック多様体の同変Darbouxの定理―その１つの応用, 2015名城大学幾何学研究集会「幾何構造の融合と発展」, 2015年3月10日, 名城大学（愛知県・名古屋市）

⑥ Hajime Ono, On non-Hamiltonian volume minimizing H-stable Lagrangian tori, 第20回複素幾何シンポジウム, 2014年11月7日, プチホテル・ゾンタック（長野県・上田市）

⑦ 小野肇, 入江博, 非 Hamilton 体積最小な Hamilton 安定 Lagrange トーラスについて,2014日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学（広島県・東広島市）

⑧ 小野肇, 非ハミルトン体積最小なハミルトン安定ラグランジュトーラスについて, 第61回幾何学シンポジウム, 2014年8月23日, 名城大学（愛知県・名古屋市）

⑨ 小野肇, 非ハミルトン体積最小なハミルトン安定ラグランジュトーラスについて, 研究集会「Contact, Symplectic, Complex Geometryの最近の進展」, 2014年6月5日, 名古屋大学（愛知県・名古屋市）

⑩ 小野肇, 偏極トーリック多様体の漸近的チャウ安定性について, 第59回幾何学シンポジウム, 2012年8月28日, 九州大学（福岡県・福岡市）

⑪ Hajime Ono, Chow stability of polarized toric manifolds, 2012 Complex Geometry and Symplectic Geometry conference, 2012年7月11日, 寧波（中華人民共和国）

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等：なし

６．研究組織
(1)研究代表者
小野　肇（ONO, Hajime）
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70467033

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者
二木　昭人（FUTAKI, Akito）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：　90143247

(4)研究協力者　なし