

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540099

研究課題名(和文) Coarse幾何学における埋蔵問題と関連する asymptotic次元の問題

研究課題名(英文) Embedding problems related to asymptotic dimension in coarse geometry

研究代表者

小山 晃 (Koyama, Akira)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：40116158

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：Large scale幾何学、特に一般の proper 距離空間のcoarse 幾何学及び CAT(0) 群のHilbert 空間へのcoarse埋蔵問題の研究を開始し、私が研究してきた(対比して)small scale幾何学と呼ばれる従来の位相幾何学の次元論との関わりを明確にすることができた。そこで得られた埋蔵問題の成果をまとめ、主要な幾何的トポロジーの国際研究集会で招待講演を行った。最終年には J. Dydak(アメリカ・テネシー大)、S. Spiez(ポーランド・数学研究所)を招き、早稲田大学でcoarse幾何学を主題とする研究集会を行い、成果のまとめと研究の総括を行った。

研究成果の概要(英文)：We investigated large scale geometry, mainly coarse geometry for general proper metric spaces with coarse geometry structure and embedding problems of CAT(0)-groups into the Hilbert space. Then we discovered a good relation between coarse geometry and small scale geometry which is an ordinal geometric topology. I obtained many interesting results with the collaborators, Jozef Kransinkiewicz and Stanislaw Spiez (the Institute of Mathematic, Polish Academy of Science). Our papers have excellent evaluation and we were invited important international conferences of geometric topology. For example, Dubrovnik VIII-Geometric Group Theory and Dynamical Systems, Dubrovnik, Croatia. It is one of traditional and important topology conferences.

Due to our proposal we organized an international meeting of coarse geometry at Wasoeda University. The future speakers are Jerzy Dydak (University of Tennessee, USA)and Stanislaw Spiez. It was a good occasion to exchange hot results and opinions.

研究分野：数学

キーワード：位相幾何学 幾何学的トポロジー coarse幾何学 asymptotic次元論 埋蔵問題

1. 研究開始当初の背景

Asymptotic 幾何学が一つの large scale geometry として、主に M. Gromov の研究活動によってその重要性が認識され、離散群の研究及び基本群に随伴する多様体の不変量に研究において基本的な手法としてなってきた。(有界でない)距離空間、例えば、完備な開リーマン多様体やより一般化された CAT(0) 空間、を対象とする large scale 幾何学として体系化され、従来の small scale の見方が展開できるので、small scale の研究成果を融合していく試みもなされてきていた。例えば Gromov が導入した asymptotic 次元が好例である。Gromov は、有限生成群について、生成元の有限対称集合 S から定義する Cayley グラフ G_S に word 距離 d_S を定義して、距離空間 (G_S, d_S) に有界 coarse 幾何学を導入、その asymptotic 次元が群の不変量となることを示した。

G. Yu (Ann. of Math. 147(1998), 325-355)が「Novikov higher signature 予想は、その基本群 $\pi_1(M) = \Gamma$ とするとき、 $asdim \Gamma < \dim M$ である多様体 M について成り立つ」を発表したことで、asymptotic 次元論の有効性が示された。さらに、G. Yu はめざましい成果をあげ、「有界 coarse 幾何構造をもち、Hilbert 空間へ coarsely に埋蔵できる距離空間について、coarse Baum-Connes 予想が成り立つ」ことを示した(Invent Math. 139(1)(2000), 201-240)。したがって、Coarse Baum-Connes 予想は Novikov 予想を導くので、これにより Novikov 予想は、「有界 coarse 幾何構造をもつ距離空間や Hilbert 空間へ coarsely に埋蔵できるか」という coarse 幾何学における埋蔵問題へ帰着されることがわかった段階であった。

2. 研究の目的

Coarse 幾何学を、asymptotic 次元論と離散距離空間の埋蔵問題を中心に研究を進める。方向付けは以下の二つをあげ、その応用として古典的な難問「Novikov 予想」と「Eilenberg-Ganea 予想」の解決の足がかりを見つけることを目指す。

- (1) 一般の測地距離空間、特に双曲空間や CAT(0)空間に関する asymptotic (cohomology) 次元論からの研究。
- (2) 有界 coarse 幾何構造を導入した一般の局所有限な離散距離空間及び CAT(0)群の Hilbert 空間及び一般の Banach 空間への coarse 埋蔵問題からの研究。

3. 研究の方法

申請時の方法として以下の計画を立てた。

- I. 初年度に large scale 幾何学の専門家を招聘し、私と連携研修者向けに集中講義をメインとするワークショップを開催する。これにより small scale 幾何学と large scale

幾何学との関連とギャップを明確化し、私たちの特性を生かす方向を見いだす。同時に研究課題に挙げた難問を攻略するプランを作成する。

- II. 2 年目・3 年目はプランに沿って研究課題の解決に取り組む。その時々課題に即した専門家を招き短期ワークショップを実施する。新たな課題として次の二つを考えている。
 - (3) 病理的なコンパクト距離空間を理想境界に持つ CAT(0)群の構成。
 - (4) 群の asymptotic 次元と理想境界の位相次元との関係の見直し。
- III. 最終年度には、研究をまとめ、国際研究集会等でも成果を問う予定である。また早稲田大学でこのプロジェクトの成果を発表し、今後の研究へつなげるために研究集会：「Coarse 幾何学と Asymptotic 次元に関するワークショップ」を開催する予定で或る

実際の方法もほぼ計画に準じ、連携研修者とのセミナー・共同研究を行った。また私たちでは不足している知見やヒントを得るために研究集会等へも積極的に参加した。

4. 研究成果

I. 科研費を活用して研究集会：

(1) 初年度(2012年)には G. Yu の弟子であり、気鋭の若手研究者 Piotr Nowak (the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences)を早稲田大学へ招聘して 11 回の連続講義を中心とするワークショップを行った。特に当時 G. Yu との共著の「Large Scale Geometry, European Mathe. Soc. 2012」が出版前であったが、その内容をいち早く知ることができ、出席した若手研究者がいち早くオリジナルの結果を出せたことは大きな成果であった。

Proper 距離空間の asymptotic 次元と Higson corona の次元の関連づけでは無限次元複体、一様 ANR 空間からのアイデアを用いるが、これまでこれらの理論は「有限次元の場合や従来の理論と同じ」と片付けられることが多かった。ところが、実際にはギャップがあり、精密な議論が必要なことが明らかになってきた。これらについては連携研究者 矢ヶ崎達彦や嶺幸太郎(東大研究員)によるところが大きい。

(2) 2013 年度には、第 4 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会(2013年9月8日~10日)を開催した。出席者は P.Krupski(University of Wroclaw, Poland), S. Antonyan (UNAM, Mexico),

M. Saul (UNAM, Mexico)
A. Bykov (Ciudad Universitaria, Mexico),
R. Jimenez (UNAM, Mexico),
V. Matijevic (University of Split, Croatia),
N. Bilan (University of Split, Croatia),
V. Valov (Nipissing University, Canada),
M. Tuncali (Nipissing University, Canada),
E. Tymchatyn (University of Saskatoon, Canada),
J. M. Rodriguez-Sanjurjo (Universidad Complutense de Madrid, Spain),
Manuel Aronso Moron (Universidad Complutense de Madrid, Spain),
F. R. Ruiz del Portal (Universidad Complutense de Madrid, Spain)
J. Dydak (University of Tennessee, USA)
らの国外からの参加者 14 名、国内より 15 名であった。幾何学的トポロジーの最新の研究結果及び研究動向を活発に議論することができた。

(3) 2015 年度には、第 8 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会 (2015 年 9 月 4 日 ~ 5 日) を開催した。出席者は
J. Dydak (University of Tennessee, USA),
S. Spiez (the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences),
M. Krupski (University of Warsaw, Poland)
の 3 名の海外からの出席者と国内より 12 名であった。幾何学的トポロジーの最新の研究結果及び研究動向を活発に議論することができた。また、第 9 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会 (2016 年 3 月 14 日 ~ 15 日) を連携研究者を中心に開催し、研究活動の総括を行った。

(4) 科研費を利用したセミナー講演：
2013 年 6 月 17 日 : Hanspeter Fisher (Ball State University, Muncie, Indiana, USA)
2013 年 9 月 13 日 ~ 14 日 : 嶺幸太郎 (東大研究員)
2014 年 11 月 17 日 : Dario Darji (University of Louisville, Louisville, Kentucky, U.S.A.)
2014 年 12 月 15 日 : Dikran Dikranjan (University of Udine, Udine, Italy)

(5) これまでの研究成果を発表し、成果を問うために 1981 年以来約 40 年、8 回にわたって幾何学的トポロジー研究の最高峰である Dubrovnik VIII (2015 年 6 月 22 日 ~ 26 日) に参加し、招待講演を行った。

また、日本、メキシコ及び中国が中心となって開催した「The 1st Pan Pacific International conference on Topology and its Applications, November 26-30, 2015, Minman Normal University, Zhang Zhoo, China」へ出席し、招待講演を行った。

いずれの講演も多くの質疑応答があり、高い評価を得た。

II. 学術論文：

距離空間の埋蔵問題が coarse 幾何学でも大きな役割を果たすのではないかと考え、以下の問題を基本に据え、Jozef Krasinkiewicz, Stanislaw Spiez (the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences) と様々な観点から国際共同研究を重ねた。

「 n 次元コンパクト距離空間 X が n 個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間 $Y_1 \times \dots \times Y_n$ へ埋蔵することができるか」

(1) コホモロジー群を用いた判定法：

K. Borsuk による先行結果「 n 次元球面は n 個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋め込むことはできない」をより精緻な定式化を試み、「 n 次元コンパクト距離空間 X が n 個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋蔵することができるとき、 $H^n(X) = 0$ ならば $\text{rank } H^1(X) \geq n$ でなければならない」を示した。これにより、例えば 2 次元射影平面や Klein の壺が 2 個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋蔵できないことを示した。またこの結果の利点は、必ずしも位相多様体ではない一般の n 次元コンパクト距離空間へ適用できることにある。

(2) (1) の結果を利用して、 n 次元コンパクト距離空間 X が 1 次元コンパクト距離空間の n 次対称積への埋蔵問題へ応用することができた。実際、1 次元多面体の n 次対称積の n 次元コホモロジー群の計算を行い、都合のよい積構造を持つことを証明した。それにより、(1) と同様に、「 n 次元コンパクト距離空間 X が 1 次元コンパクト距離空間の n 次対称積へ埋蔵することができるとき、 $H^n(X) = 0$ ならば $\text{rank } H^1(X) \geq n$ でなければならない」を示した。したがって、2 次元球面、2 次元射影平面や Klein の壺がまた 1 次元コンパクト距離空間の n 次対称積へ埋蔵することができないことを示した。これにより Illanes-Nadler, *Hyperspaces, Fundamental and Recent Advances*, Marcel Dekker, 1999 で提出した「問題 83-14」の解答を与えた。

また、(1) では積空間への埋蔵問題を考察したので、対称積への埋蔵問題との違いを明確にする必要が生じた。そこで「1 次元コンパクト距離空間の n 次対称積へは埋蔵することができる n 個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋め込むことはできない n 次元コンパクト距離空間」

を構成して、埋蔵問題に違いがあることを示した。

- (3) (1) (2) で考察した n 次元コンパクト距離空間の n 次元コホモロジー群は非自明との仮定があったので、研究会では常に「コホモロジー群の意味で非輪状ならば埋蔵問題は肯定的な解を持つか」との質問があった。それに答えるために次の定理を示した。2次元コンパクト多面体 P が2個のグラフの積空間へ埋蔵できているとする。このとき
- (i) $H^1(P) = 0$ ならば、 P は縮約する。
 - (ii) $\text{rank } H^1(P) = 1$ ならば、 P は単純閉曲線へ縮約する。
 - (iii) $\text{rank } H^1(P) = 2$ ならば、 P はある一般多様体へ縮約する。
- したがって、可縮であるが縮約しない Bing house や Zeeman の dunce hat は2個のグラフの積空間へ埋蔵することはできないことを証明した。

- (4) 考察する対象を位相多様体に制限した場合、次のことを証明することができた。 M が2個のグラフの積空間へ埋蔵できているとする。このとき
- (i) $\text{rank } H^1(M) \leq 3$ ならば、 M はトーラスである。
 - (ii) $\text{rank } H^1(M) = 4$ ならば、 M は2個のトーラスの連結和である。
- したがって、いずれの場合も向き付け可能になることがわかる。これらをまとめると、R. Cauty の優れた定理向き付けできない連結な閉局面 M が2個のグラフの積空間へ埋蔵できる必要十分条件は $H^1(M) \geq 5$ である」の別証明が得られた。

これら(1)-(4)を下記の論文2編にまとめて出版した。

III. 図書について

1992年に「Recent Progress in General Topology, Elsevier」が出版されて以来、10年ごとに general topology のトピックスと問題をまとめた図書が出版され、第2弾は2002年に「Recent Progress in General Topology II」が出版された。この流れで、第3弾は2012年を目標に、Recent Progress in General Topology III が企画された。今回は20のテーマを選ばれ、現在のエキスパートたちに執筆が依頼された。結果として総ページ数900頁の大部が出版された。その中で次元論に関連するテーマとして書いたものが「Topics in Dimension Theory」である。内容は2000年以降の次元論に関する新しい結果と今後の課題に焦点を当てたもの

で、私のコホモロジー次元論や上述の埋蔵問題の考察もメインの話題になっている。さらに coarse 幾何学、特に asymptotic dimension に関連した項目も多く含まれ、今後の指針を与えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

1. A. Koyama, J. Krasinkiewicz and S. Spiez, Characterizations of n -dimensional compacta in the products of n curves, *Topology and its Applications*, 196(2015), 618-640 (査読有)。
2. A. Koyama, J. Krasinkiewicz S. Spiez, On embeddings into products of curves - An algebraic approach, *Houston J. Math.* 38(2012), 611-641(査読有)。

[学会発表](計3件)

1. A. Koyama, A role of Wyburn factorization theorem in dimension theory, The 1st PanPacific International conference on Topology and its Applications, November 26-30, 2015, Minman Normal University, Zhang Zhoo, China (招待講演)。
2. A. Koyama, Characterizations of n -dimensional compacta in the products of n curves, *Dubrovnik VIII-Geometric Group Theory and Dynamical Systems*, June 22-26, 2015, Dubrovnik, Croatia (招待講演)。
3. A. Koyama, On embeddings into products of curves - An algebraic approach, 28th Summer Conference on Topology and its Applications, July 23 -- 26, 2013 Nipissing University, North Bay, Canada (基調講演)。

[図書](計1件)

1. J. Dydak and A. Koyama, *Topics in Dimension Theory*, Recent Progress in General Topology III, Edited by K. P. Hart, Jan van Mill and P. Simon, Springer-Atlantis Press, January 2014, 359 -- 397.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小山 晃 (KOYAMA, Akira)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 40116158

(2) 研究分担者

江田 勝哉 (EDA, Katsuya)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 90015826

(3)連携研究者

知念 直紹 (CHINEN, Naotsugu)
防衛大学校・教授
研究者番号：20370067

(4)連携研究者

保坂 哲也 (HOSAKA, Tetsuya)
静岡大学・総合科学技術研究科・准教授
研究者番号：50344908

(5)連携研究者

矢ヶ崎 達彦 (YAGASAKI, Tatsuhiko)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40191077