様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１０３

研究課題名（和文）離散可積分系の観点による曲線の差分幾何

研究課題名（英文）Discrete differential geometry of curves from the viewpoint of discrete integrable systems

研究代表者
松浦　望（MATSUURA, Nozomu）

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：００３８９３３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：離散曲線の変形について可積分系の立場から調べた。とくに「平面離散曲線の離散的変形」「空間離散曲線の連続的変形」「空間離散曲線の離散的変形」の三つの場合について、それぞれ可積分なモデルを構築し、さらに離散可積分系理論の技術をもちいて特徴的な具体例をたくさん構成した。これらを始めとして研究期間を通じて離散曲線の変形理論について多くの知見を得、今後研究が進展するための基礎を築いた。

研究成果の概要（英文）：We studied deformations of discrete curves from the viewpoint of integrable systems. Especially we formulated three models of such deformations; the first is discrete deformation of planar discrete curves, the second is continuous deformation of spatial discrete curves, and the last is discrete deformation of spatial discrete curves. These deformations are governed by the discrete Burgers equation, the semi-discrete modified KdV equation, and the discrete modified KdV (or discrete sine-Gordon) equation, respectively. We illustrated our deformation theory with infinitely many examples to show the integrability of our models.

研究分野：幾何学

キーワード：差分幾何　曲線　可積分系

１．研究開始当初の背景

可積分系と関わる微分幾何に現れるさまざまな対象は、離散化によってその本質的構造を明らかにすることが可能であろうと期待されている。そうした研究領域は差分幾何（離散微分幾何）と呼ばれ、おもに曲面の場合が活発に研究されてきたが、曲線については十分に研究されてこなかった。

２．研究の目的

微分幾何がなめらかな図形（たとえば曲線）を調べるのに対し、差分幾何は離散的な図形（たとえば折線）を調べる。この分野ではとくに、曲線と曲面の微分幾何における概念や方法の、離散的な対応物を開発することを目標にしている。そうすることによって微分幾何の基本的構造をよりよく理解したいというのが目論見のひとつである。差分幾何は、ビジュアライゼーションや離散的な幾何学的オブジェクトの運動を統制する新しい数学的枠組みとしての側面をもち、産業技術と数理を結びうる分野のひとつとしても期待されている。本研究はとくに、ユークリッド空間内の曲線の変形に関してその差分幾何の理論を構築することを目的とする。差分幾何では、幾何学的オブジェクトの整合性・可積分性を保証する際に離散可積分系の理論を基盤にしているため、離散化された曲線を、離散ソリトン方程式の厳密解によって統制することが可能となる。本研究の具体的な研究目標は、空間離散曲線の連続的変形の定式化と厳密解の構成、空間離散曲線の離散的変形の定式化と厳密解の構成である。

３．研究の方法

上記の目標を達成するために、関連分野の研究者と討論および共同研究を行った。また、必要な技術は、さまざまな幾何のもとでの曲線論、可積分系理論と離散可積分系理論、計算機を利用した数式処理などであった。

４．研究成果

(1) 先行研究の整理

曲線と曲面の差分幾何について先行研究の結果を整理し、概説論文④として出版した。

(2) 曲線の離散化

① 平面曲線の場合：平面の幾何構造としてユークリッド幾何や等積中心アフィン幾何を与えた場合の平面離散曲線論はすでに先行研究 [1] がある。そこで本研究では、相似幾何の枠組みにおける平面離散曲線論を展開した。

② 空間曲線の場合：フルネ枠（接ベクトルと主法線ベクトルと陪法線ベクトルがつくる行列）を離散化して、空間離散曲線に対する離散的なフルネ・セレの公式を導いた。その結果として、曲率の役割を果たすのが隣接する接ベクトル間のなす角であり、捩率の役割を果たすのが隣接する陪法線ベクトル間のなす角であることがわかった。また生化学の分野では、離散的なフルネ・セレの公式と同内容のものがアイリングの公式として古くから知られている。

(3) 平面離散曲線の離散的変形

平面内の離散曲線が離散的に変形していく様子を考える。平面離散曲線の離散的変形のうち、もっとも基本的なのは隣接する二点間の距離を保つような変形（等周変形）であり、そのような変形は離散 modified KdV 方程式によって統制されることが知られている（参考文献 [1][2]）。等周変形は、平面の幾何構造としてユークリッド幾何を指定した場合にいちばん自然と思われる離散的変形である。また、平面の幾何構造として等積中心アフィン幾何を指定した場合には、平面離散曲線の離散的変形として自然なのは、隣接する二点と原点がつくる三角形の面積を保存するような変形（等積変形）であり、そのような変形は離散 KdV 方程式で統制されることも知られている（参考文献 [1]）。そこで本研究では、平面の幾何構造をさらに変えて、相似幾何の枠組みで平面離散曲線の離散的変形を考察した。相似幾何のもとで自然と思われる離散的変形は、隣接する “接ベクトル” 間の角度を保存するような変形である。これを平面離散曲線の等角変形とよぶ。以上に述べたことをまとめると、ユークリッド幾何の場合が長さを保つ変形（等周変形)、等積中心アフィン幾何の場合が面積を保つ変形（等積変形)、相似幾何の場合が角度を保つ変形（等角変形）となっており、これらの変形はそれぞれの幾何の特徴を反映している。研究成果として次のことがわかった。

① 平面離散曲線の等角変形を離散バーガース方程式によって統制することができる。

② 離散バーガース階層によって統制されるような平面離散曲線の等角変形の無限系列を構成することができる。

③ 高次離散バーガース方程式の衝撃波解にしたがって時間発展する平面離散曲線の等角変形列について、その位置ベクトルを明示的に求めることができる。

④ 以上の結果はすべて非自励化することができる。すなわち格子間隔が任意関数に拡張されたような高次離散バーガース方程式をもちいて、以上の結果と同様のものを定式化することができる。

(4) 空間離散曲線の連続的変形

定捩率な空間曲線の等周変形（伸び縮みのない変形）をmodified KdV方程式によって統制することができることが1970年代のラムらの研究によって知られている。このことの半離散的類似として、空間内の定捩率な離散曲線が、隣接する二点間の距離を保ちながら連続的に変形していく様子を考える。なお平面内の離散曲線の場合には先行研究 [3] があり変形は半離散 modified KdV 方程式によって統制されることが知られている。ラムらの研究の半離散的類似として、また同時に、先行研究 [3] の拡張として、次のことがわかった。

① 離散化された定捩率空間曲線の等周変形を半離散 modified KdV 方程式によって統制することができる。

② 半離散 modified KdV 方程式の多重ソリトン解にしたがって時間発展する定捩率空間離散曲線の等周変形について、その位置ベクトルを明示的に求めることができる。

空間離散曲線の連続的変形を統制するという観点からは、アブロヴィッツ・ラディック階層に属する高次の半離散ソリトン方程式の厳密解を用いて、同様の明示公式を与えることが今後の研究課題のひとつとなるだろう。

(5) 空間離散曲線の離散的変形

上記の研究成果 (4) で述べたことをさらに離散化する。すなわち、定捩率な空間離散曲線に対してその捩率の値を保存するような離散的な等周変形を考える。空間離散曲線の離散的変形についての先行研究はどれも、空間離散曲線の位置ベクトルそのものの離散時間発展を陽的に書き下すことができず、離散フルネ枠のレベルでの離散時間発展を記述するにとどまっていたが、本研究では、離散的捩率が定数であるような空間離散曲線に対してその離散的捩率と離散的弧長をともに保つような離散時間発展を定式化し、しかもその離散時間発展を空間離散曲線の位置ベクトルそのものの変形として陽的に書き下すことに成功した。これは先行研究において調べられた離散フルネ枠の離散的変形理論をいちど “積分” したことに相当し、非自明な結果である。研究成果として次のことがわかった。

① 変形の公式：　定捩率な空間離散曲線に対して、新しい空間離散曲線を次の要領で作る。

(i) まず初期定捩率空間離散曲線の基点をその点における接触平面内の位置に移動する。ただし移動距離は捩率の逆数を超えないものとする。
(ii) 初期定捩率空間離散曲線の残りの各点を「等周かつ等距離の位置にありしかもその点における接触平面の下半部分にある」ような位置に動かす。ただし等周とは隣接する二点間の距離を保つことであり、等距離とは各点の移動距離が点によらず一定値であることを意味する。

この手順によって、基点の移動先を決めれば新しい空間離散曲線がひとつ定まる。ところが空間曲線の挙動はワイルドなので、この変形は一般に初期空間離散曲線の捩率を保存しない。捩率を保存するためには、たとえば基点の移動位置をさらに制限するとよいが、その詳細は発表論文①を参照されたい。このようにして得られる捩率保存の等周等距離変形は可積分であり、実際つぎのことが言える。

② 可積分条件：　定捩率空間離散曲線の捩率保存等周等距離変形を、離散 modified KdV 方程式または離散 sine-Gordon 方程式によって統制することができる。とくに離散時間発展の各ステップにおいて「離散 modified KdV 方程式による捩率保存等周等距離変形」か「離散 sine-Gordon 方程式による捩率保存等周等距離変形」かを自由に選択することができる。これは半離散系や連続系にはない離散系特有の自由度である。

③ 逆構成：　離散 modified KdV 方程式あるいは離散 sine-Gordon 方程式の多重ソリトン解にしたがって時間発展するような捩率保存等周等距離変形列について、その位置ベクトルを明示的に求めることができる。

④ 離散曲面：　この捩率保存等周等距離変形の軌跡は離散曲面を形成するが、それは離散的な負定曲率曲面（離散 K 曲面）となる。離散 K 曲面は差分幾何という研究分野がおこる動機付けとなった離散曲面であり、離散等温曲面とならんで現在でも重要な研究対象となっている。我々の提示した捩率保存等周等距離変形の公式は、離散 K 曲面の新しい構成方法を与えている。

⑤ 非自励化：　以上の結果はすべて非自励化することができる。すなわち格子間隔が任意関数に拡張されたような離散 modified KdV 方程式や離散 sine-Gordon 方程式をもちいて、以上の結果と同様のものを定式化することができる。格子間隔は離散曲面の座標曲線の弧長に相当するような量であるため、非自励化は幾何学的に自然な要請である。

〈参考文献〉

[1] Nozomu Matsuura, Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves, International Mathematics Research Notices 2012 (2012), No. 8, pp. 1681–1698.
[2] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, Kyushu Journal of Mathematics

66 (2012), pp. 303–324.
[3] Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, Explicit solutions to semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical 45 (2012), 045206 (16pp).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）
① Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves, Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical 47 (2014) 235202 (26pp). 査読有. DOI: 10.1088/1751-8113/47/23/235202
② 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, 離散 mKdV および離散サイン・ゴルドン方程式による空間離散曲線の変形, 数理解析研究所講究録別冊 B47 (2014), pp. 1–22. 査読有.
③ 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, 空間離散曲線の等周変形と離散 K 曲面, 応用力学研究所研究集会報告 25AO-S2 (2014), pp. 1—7. 査読有.
④ 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 日本応用数理学会論文誌第 23 巻第 1 号 (2013), pp. 55–107. 査読有. 日本応用数理学会 2014 年度論文賞 (サーベイ部門) 受賞. http://ci.nii.ac.jp/naid/110009594908
⑤ 松浦望, 曲線の差分幾何, 数理解析研究所講究録別冊 B30 (2012), pp. 53–75. 査読有. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B30/B30.html

〔学会発表〕（計 15 件）
① 松浦望, 離散曲線の変形, 日本数学会 2015 年度年会 (明治大学, 東京都千代田区), 2015 年 3 月 21 日.
② 梶原健司・黒田利信・松浦望, 平面離散曲線の等角変形と離散 Burgers 階層 II, 日本数学会 2015 年度年会 (明治大学, 東京都千代田区), 2015 年 3 月 21 日.
③ 梶原健司・黒田利信・松浦望, 平面離散曲線の等角変形と離散 Burgers 階層 I, 日本数学会 2015 年度年会 (明治大学, 東京都千代田区), 2015 年 3 月 21 日.
④ Nozomu Matsuura, Deformations of discrete curves, Transformations and Singularities (Vienna University of Technology, Vienna, Austria), 2014 年 9 月 19 日.
⑤ 梶原健司・黒田利信・松浦望, 平面離散曲線の等角変形と離散 Burgers 階層, 第 10 回日本応用数理学会研究部会連合発表会 (京都大学, 京都府京都市), 2014 年 3 月 20 日.
⑥ 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, 離散 mKdV 方程式と離散 sine-Gordon 方程式による空間離散曲線の変形, 日本数学会 2014 年度年会 (学習院大学, 東京都豊島区), 2014 年 3 月 16 日.
⑦ 松浦望, 曲線の離散微分幾何, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2014 (九州大学, 福岡県福岡市), 2014 年 2 月 22 日.
⑧ Nozomu Matsuura, Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves, (Vienna University of Technology, Vienna, Austria), 2013 年 12 月 18 日.
⑨ 松浦望, 空間離散曲線の等周等距離変形と離散 K 曲面, 福岡微分幾何研究会 (福岡大学セミナーハウス, 福岡県福岡市), 2013 年 11 月 2 日.
⑩ 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, 空間離散曲線の等周変形と離散 K 曲面, 非線形波動研究の拡がり (九州大学応用力学研究所, 福岡県春日市), 2013 年 10 月 31 日.
⑪ 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, Discrete mKdV flow on discrete space curves, 日本応用数理学会 2013 年度年会 (アクロス福岡, 福岡県福岡市), 2013 年 9 月 9 日.
⑫ Nozomu Matsuura, Discrete differential geometry of curves and surfaces, The Fourth International Workshop on Differential Geometry (Niji Matsubara Hotel, 佐賀県唐津市), 2013 年 3 月 27 日.
⑬ 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 計算による数理科学の展開 2013 (神戸大学, 兵庫県神戸市), 2012 年 12 月 27 日.
⑭ 井ノ口順一・梶原健司・松浦望・太田泰広, 空間曲線の等周変形と τ 函数による明示公式, 日本応用数理学会 2012 年度年会 (稚内全日空ホテル, 北海道稚内市), 2012 年 8 月 29 日.
⑮ 松浦望, 曲線の差分幾何, 第 59 回幾何学シンポジウム (九州大学, 福岡県福岡市), 2012 年 8 月 28 日.

〔図書〕（計２件）
① Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, Discrete models of isoperimetric deformation of plane curves, A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology, Mathematics for Industry 5 (2014), Springer Japan, pp. 89–99. DOI: 10.1007/978-4-431-55060-0_7
② Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, Discrete isoperimetric deformation of discrete curves, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis I, Mathematics for Industry 4 (2014), Springer Japan, pp. 111–122. DOI: 10.1007/978-4-431-55007-5_15

６．研究組織
研究代表者
松浦 望（MATSUURA, Nozomu）
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：00389339