

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 5 月 25 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540104

研究課題名(和文) 微分幾何学への代数計算理論の適用と応用

研究課題名(英文) Applications of computational algebra theory to differential geometry

研究代表者

濱田 龍義 (Hamada, Tatsuyoshi)

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：90299537

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では微分幾何学への代数計算理論の適用と応用を試みた。本研究の成果として、複素空間型内の実超曲面の部分多様体としての構造と、概接触構造から構成される幾何学的不変量に注目し、研究をすすめた。また、代数計算理論分野との交流により、最新の計算代数システムおよび可視化ソフトウェアを収録したDVD起動型Linuxシステム MathLibre の開発、公開を行った。MathLibreは数学ソフトウェアの活用だけでなく、ライブアーカイブとしても重要である。

研究成果の概要(英文)：We investigated the new approach to differential geometry with related to the theory of computer algebra systems. We studied the geometrical invariant related with submanifold theory and almost contact structures.

On the other hand, We developed the computer environment of Live Linux, it contains various computer algebra and visualization systems. MathLibre is the system of collection of software tools and documents for researching mathematics.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学 部分多様体論 計算機代数 MathLibre

### 1. 研究開始当初の背景

1960年代にブルーノ・プッフバークによってグレブナー基底は多項式環のイデアルの基底として発見された。彼の結果は、その後10年ほどは誰からも評価されない不遇の時代を過ごしたが、1980年代以降、計算機の速度向上に伴い、グレブナー基底は代数計算の基礎的な技術として脚光を浴びることになる。現在では、可換環論や代数幾何学、統計学、組合せ論といった現代数学との関連からも重要視されている。また、整数計画、符号理論、ロボット工学などへの応用も良く知られている事実である。専門家以外には、それほど知られていないが、ユークリッド幾何学における定理自動証明の理論にも用いられており、定理自動証明機能を実装した幾何学ソフトウェアが、中国、フランス等で開発されている。一方、トポロジー、特に結び目理論においてもアレクサンダー多項式、コンウェイ多項式等、多項式に帰着される不変量の存在により、代数計算、トポロジー相互の研究交流は活発に行われている。国内でも神戸高専の児玉宏児氏による KNOT などが研究支援用数学ソフトウェアとして高く評価されており、代数計算との連携という意味では、数論、代数幾何と並んで成果が期待できる分野となっている。

一方、微分幾何学においては、主に連立多項式系の変数消去法としてグレブナー基底が利用された実績が存在する。例えば、第45回幾何学シンポジウムにおける大阪大学の坂根由昌氏による講演、「グレブナー基底と等質アインシュタイン計量」が記憶に新しい。ここで、坂根氏は等質多様体上のアインシュタイン等質計量について考察を行なったが、 $SU(4)$ -不変なアインシュタイン計量を決定するためにグレブナー基底を用いた。その他にも平均曲率一定曲面の一種であるドロネー曲面の一般化として、周期関数を平均曲率に持つ曲面が剣持勝衛氏によって構成されているが、その構成方法にグレブナー基底が用いられている。主曲率に関する固有値多項式の評価やトーリック多様体のハミルトン安定性等は連立多項式系に帰着されることがわかっている。この他にも幾つかの問題が連立多項式系に帰着され、これらに対してグレブナー基底を用いた手法が適用できるのではないかと期待感が徐々に広がっている。

### 2. 研究の目的

本研究は、代数計算における最近の成果であるグレブナー基底や限量子消去法に関する理論を微分幾何学に適用し、新たな研究手法の理論形成を行なうことを目的とする。

### 3. 研究の方法

以下のような研究方法を採用した。

- (1) 複素空間型内の実超曲面の研究において代数計算による手法の適用を試みる。
- (2) 代数計算の最新のアルゴリズムにつ

いて代数計算の専門家と情報交換を行なう。

- (3) 代数計算の応用面について可換環論、代数幾何学、トポロジー、代数計算統計学の専門家と情報交換を行なう。
- (4) KNOPPIX/Math プロジェクトを発展的に解消し、新プロジェクトを開始する。

### 4. 研究成果

本研究者は、部分多様体としての構造と、概接触構造に注目し、2002年に複素空間型内の実超曲面に幾何学的不変量リッチスターテンソルを導入した。最近になって、ギリシャの2人の幾何学者 George Kaimakamis と Konstantina Panagiotidou によって、複素2次元の複素空間型内の実超曲面について、リッチスターテンソルが平行な実超曲面が決定された。しかし、一般の複素次元の場合については、リッチスターテンソルが平行な場合も、平坦な場合も分類が未解決であった。今回、平坦な場合については完全に分類を与えることができた。

また、佐賀大学の山下勝文氏との共同研究により、複素空間型内の実超曲面の第二基本形式と概接触構造から得られるテンソルが平行な場合について、完全に分類を行った。また、この結果を元にケーラー多様体が複素空間型となる条件を導いた。

### MathLibre の展開

本研究の研究成果として、

- (1) MathLibre 2013
- (2) MathLibre 2014
- (3) MathLibre 2015
- (4) MathLibre 2016

を公開し、最新の数学ソフトウェアを容易に参照できるシステムの構築を進めている。

2003年以来幾何学だけでなく、トポロジー、計算代数、統計理論、可換環論、微分方程式論、数論、組合せ論、力学系、基礎論などの様々な数学諸分野の専門家と横断的に協力関係を築き、システムの充実を図ってきた。また、MathLibre は数学、数理科学分野における教育ツールとしても活用されている。信州大学、東京大学では学部生の計算機環境として導入されており、今後、国内における計算機代数と数学、数理科学諸分野との連携、発展が期待される。

数学、数理科学分野以外の分野においても利用者は増えており、工学、経済学、医学、農学などにおける数学ソフトウェア利用者を取り込んでいる。

国際的に見ても、このような包括的な数学ソフトウェアプロジェクトは類を見ない。数学ソフトウェアの活用はもちろんのこと、歴史的なアーカイブとしての役割も果たしている。MathLibre Project は国際的にも認知されつつあり、インドにおける学生教育支援プロジェクト MTTs では、i386 版の MathLibre が継続的に活用されている。

また、最新のソフトウェア開発に関する情報収集を主目的にオープンソースソフトウェアコミュニティとの連携にも力を入れている。一方で、これはアウトリーチ活動の一環としても、とらえることができる。

KNOPPIX/Math Project の発展的解消により、MathLibre への移行も順調に進めることができた。オープンソースソフトウェアコミュニティの協力を得て、継続的に開発、更新可能な環境を構築できたと考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### 〔雑誌論文〕(計 7 件)

- (1) Tatsuyoshi Hamada and Katsufumi Yamashita, "The parallelism of a certain tensor of real hypersurfaces in a nonflat complex space form, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 査読有, 37 (2015) No.3, p81--88.
- (2) Tatsuyoshi Hamada, "MathLibre: personalizable computer environment for mathematical research", Poster session of ISSAC2014, ACM Communication in Computer Algebra, 査読有, 48 (2014) p116--117.
- (3) Tatsuyoshi Hamada, "MathLibre: modifiable desktop environment for mathematics", Mathematical Software -- ICMS2014, Lecture Notes in Computer Science 8592, 査読有, (2014) p702--705.
- (4) Tatsuyoshi Hamada, "Some real hypersurfaces of complex projective space", Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, 査読有, (2014) 82--86.
- (5) Tatsuyoshi Hamada, "Live exhibitions in the classroom with mathematical software", Proceedings of the Korean Society of Mathematical Education, Fall meeting, Cheongju, Korea, 査読有, (2012) 13--16.
- (6) Tatsuyoshi Hamada, Yuji Hoshikawa, Hiroshi Tamaru, "Curvatures properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space", Journal of Geometry, 査読有, 103 (2012) 247--261.
- (7) Tatsuyoshi Hamada and KNOPPIX/Math committers, "KNOPPIX/Math: a live system for mathematics", Proceedings of the Second CREST-SBM International Conference "Harmony of Groebner Bases and the Modern Industrial Society", Takayuki Hibi, 査読有 (2012) 41--44.

#### 〔学会発表〕(計 5 件)

- (1) 濱田龍義, 「MathLibre 2015 について」, 第 24 回日本数式処理学会大会, 2015 年 6 月 7 日, 筑波大学(茨城県・つくば市)
- (2) 濱田龍義, 「複素空間型内の実超曲面のある種の平坦性について」, 日本数学会 2015 年度年会, 2015 年 3 月 22 日, 明治大学(東京都・千代田区)
- (3) 濱田龍義, 「MathLibre 2014 について」, 第 23 回日本数式処理学会大会, 2014 年 6 月 1 日, 徳島大学(徳島県・徳島市)
- (4) 濱田龍義, 「MathLibre 2013 について」, 第 22 回日本数式処理学会大会, 2013 年 6 月 7 日, 防衛大学校(神奈川県・横須賀市)
- (5) 濱田龍義, 「KNOPPIX/Math から MathLibre へ」, 第 21 回日本数式処理学会大会, 2012 年 6 月 8 日, 山口大学(山口県・山口市)

#### 〔図書〕(計 2 件)

- (1) 竹村彰通・日比孝之・原尚幸・東谷章弘・清智也・『グレブナー道場』著者一同(濱田龍義, 野呂正行, 青木敏, 大杉英史, 高山信毅, 中山洋将, 西山絢太), 共立出版「グレブナー教室 - 計算代数統計への招待」, 2015, 224 ページ (12--26)
- (2) Takayuki Hibi, Tatsuyoshi Hamada, Masayuki Noro, Satoshi Aoki, Akimichi Takemura, Hidefumi Ohsugi, Nobuki Takayama, Hiromasa Nakayama and Kenta Nishiyama, Springer, "Groebner Bases - Statistics and Software Systems", Hibi, Takayuki (Ed.), 2013, 474 ページ (55--106).

#### 〔その他〕

ホームページ等

<http://www.mathlibre.org/>

#### アウトリーチ等

- (1) 濱田龍義, 「描いて動かして楽しむ数学」, 高等学校・大阪市立大学連携数学協議会第 9 回シンポジウム, 2013 年 11 月 23 日, 大阪市立大学.
- (2) 濱田龍義, 「数学とオープンソース」, 平成 25 年度大阪市立大学国際シンポジウム「都市の再創造」, セッション 8: コミュニティを創るオープンソースアプローチ, 2013 年 9 月 19 日, 大阪市立大学.
- (3) 濱田龍義, 「数学ソフトウェアで作るぐるぐる定規」, オープンソースカンファレンス徳島, 2013 年 3 月 9 日, とくぎんトモニプラザ.
- (4) 濱田龍義, 「動的数学ソフトウェア GeoGebra でつくるスピログラフ(ぐるぐる定規)」, オープンソースカンファレンス大分, 2012 年 10 月 27 日, ソフィアホール.

- (5) 濱田龍義, 「数学ソフトと歩く曲線の世界」, 女子中高生夏の学校 2012, 【女子中高生】サイエンスアドベンチャーI 「ミニ科学者になろう」, 2012年8月10日, 国立女性教育会館.
- (6) 濱田龍義, 「数学ソフトウェア使ってますか?」, 大統一 Debian 勉強会, 2012年6月23日, 京都大学.
- (7) 濱田龍義, 「数学とオープンソース」, 数電機シンポジウム, 2012年2月19日, 首都大学東京.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

濱田龍義 (HAMADA TATSUYOSHI)

福岡大学・理学部・助教

研究者番号: 90299537

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし