1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１５３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１０５
研究課題名（和文）組合せ論的手法によるリー群上のループ空間の研究

研究課題名（英文）Research on the loop spaces on Lie groups by combinatorial methods

研究代表者
中川　征樹（Nakagawa, Masaki）

岡山大学・教育学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：５０３７００３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 複素コボルディズム理論における普遍形式群を用いて，Ivanovによる通常のfactorial Schur P-およびQ-関数の一般化である対称関数の新しい族を導入した．これらの対称関数を用いて，無限シンプレクティックおよび特殊直交群上のループ空間の，複素向き付け可能な一般(コ)ホモロジーのなすHopf代数の記述を与えた．さらに，これらの関数の様々な性質(「消失性」等)を示した．
(2) 通常のfactorial Schur関数の一般化をも導入し，複素向き付け可能な一般コホモロジー理論において，複素ベクトル束に付随する旗束上のGysin準同型を用いた特徴付けを与えた．

研究成果の概要（英文）：(1)Using the universal formal group law in complex cobordism theory, we introduced a new family of symmetric functions, which is a generalization of the usual factorial Schur P- and Q-functions due to Ivanov. Using these symmetric functions, we gave a description of the complex oriented generalized (co)homology Hopf algebras of the loop spaces on the infinite symplectic and special orthogonal group. Furthermore, we showed the various properties of these functions such as factorization property, vanishing property, and basis theorem.
(2)We also introduced a generalization of the usual factorial Schur functions. We gave a characterization of these symmetric functions via the Gysin homomorphism for the flag bundle associated with a complex vector bundle in complex oriented generalized cohomology theory.

研究分野： 数物系科学

キーワード： トポロジー　幾何学　リー群　ループ空間　組合せ論　一般コホモロジー理論

1．研究開始当初の背景

基点付き空間 X 上の基点付きループ空間 ΩX は，「連続な積を持つ空間」である「H-空間」の代表的なものとして，Serre の学位論文(1954 年)以降，代数的トポロジーの主要な研究対象の一つである．中でもコンパクトな連結（かつ単連結）Lie 群 K 上のループ空間 ΩK が重要であり，1950 年代後半に，Bott，Bott-Samelson 等により精力的に研究され，ΩK の整数係数ホモロジー群の加法構造(ねじれ元をもたない，偶数次数の元のみから成る，「Bott-Samelson の K-サイクル」を利用した自由基底の構成)や Hopf 代数構造等が明らかにされた．これら一連の研究の中で，Bott は有名な Bott 周期性定理を示している． これはホモトピー論の観点から見ると， 無限次元古典群 $U = U(\infty)$，$Sp = Sp(\infty)$，$SO = SO(\infty)$上のループ空間に関するホモトピー同値 $BU \simeq \Omega SU$，$Sp/U \simeq \Omega Sp$，$SO/U \simeq \Omega_0(SO)$ (BU は U の分類空間， $\Omega_0(SO)$は ΩSO の単位ループを含む連結成分)が存在することに他ならない．このように Lie 群上のループ空間は代数的トポロジーにおける重要な研究対象である．

1970 年代に入り，Lie 群上のループ空間の研究は新たな局面を迎える．すなわち，Garland-Raghunathan と Quillen により独立に，ΩK が「アフィン Grassmann 多様体」Gr_G (G は K の複素化)とホモトピー同値であることが示され，これにより，Lie 群上のループ空間をも「無限次元の旗多様体」と見ることが可能となり，その上で，いわゆる「Schubert calculus」が展開できる道が切り拓かれた(「アフィン Schubert calculus」)．その後，1980 年代に入り， Mitchell は代数的トポロジーに Schubert calculus の視点を持ち込み，Quillen による上記の定理の証明および対称空間上のループ空間への一般化について注目すべき研究を行っているが，代数的トポロジーではほとんど注目されることはなかった．本研究の根底にある動機の一つは，この Mitchell の仕事を現代流のアフィン Schubert calculus の視点から理解することにある．一方で，アフィン Grassmann 多様体のホモロジー環と Schubert 類との関係は，主に代数的組合せ論の研究者によって，近年精力的に研究が進められ，「k-Schur 関数」などの新しい対称関数の族が数多く見出されている(Lam, Lam-Schilling-Shimozono)．

研究代表者は，これまで Cartan，Borel により始められた，完全旗多様体 K/T (T は K の極大トーラス)を含む等質空間のコホモロジー環の研究や，Bott により始められた ΩK のホモロジー環の Hopf 代数構造の研究を通して，次第に Schubert calculus に興味を持ち，すべてのコンパクトな単連結単純 Lie 群 K に対して，旗多様体 K/T のコホモロジー環の Schubert 基底を用いた表示の追究や，K の複素化 G の Chow 環 $A(G)$の研究を進めてきた．今後はアフィン Grassmann 多様体としての基点付きループ空間 ΩK に焦点を絞って，主にその(コ)ホモロジー，さらには K 理論や複素コボルディズムなどの一般(コ)ホモロジーについて，トポロジー，組合せ論双方の観点から考察を進めて行く予定である．

2．研究の目的

無限次元ユニタリー群 U の分類空間 BU の整数係数コホモロジー環は，「普遍 Chern 類」により生成される無限変数の多項式環であり，ベクトル束の分裂原理により，各 Chern 類を基本対称関数と同一視することができる．これにより，対称関数環 Λ と BU のコホモロジー環との Hopf 代数としての同型が存在する．双対的に，BU のホモロジーもまた Λ と Hopf 代数として同型となることが知られている．これは Bott 周期性定理 $BU \simeq \Omega SU$ を通して，ループ空間 ΩSU のホモロジー環と Λ との Hopf 代数としての同型を導く．ここで，BU は無限複素数空間の中の n 次元線形部分空間のなす無限 Grassmann 多様体の，$n\to\infty$ における極限として，また，ループ空間 ΩSU は，アフィン Grassmann 多様体 $\Omega SU(n) \simeq Gr_{SL(n,C)}$の，$n\to\infty$ における極限として，そのホモロジー群は「ホモロジー Schubert 類」を基底とする自由 Z-加群であり，Λ は「Schur 関数」を基底とする自由 Z-加群である． 上記の同型は $n\to\infty$ の極限において，幾何学的に定義された「Schubert 類」と，代数的な対象である「Schur 関数」との対応を与えている．つまり Schubert 類を表す「Schubert 多項式」に相当するものが Schur 関数となっているのである．研究代表者は他の古典群，すなわちシンプレクティック群 Sp や特殊直交群 SO に対しても，トポロジーの側からの考察を行い，Kono-Kozima の結果を利用して，ΩSp および $\Omega_0(SO)$のホモロジーが，それぞれ Schur P, Q-関数のなす環 Γ' および Γ と Hopf 代数として同型であることを示した(2010 年 11 月)．さらに連携研究者である成瀬弘氏との共同研究において，ΩSp および $\Omega_0(SO)$の「ホモロジーK-理論 (K-ホモロジー)」に対しても同様の記述を得，「K-ホモロジー Schubert 類」を表す多項式の候補を組合せ論の観点から構成した．これにより，従来の Schur の P, Q-関数を拡張した新しい対称関数の族が構成できた．今後は，これら一連の結果を一般の単連結単純 Lie 群 K および複素向き付け可能な一般(コ)ホモロジー理論(特に複素(コ)ボルディズム理論，BP-理論)の場合に拡張し，アフィン Grassmann 多様体 ΩK の(コ)ホモロジー環の，幾何学的にも組合せ論的にも意味のある記述を完成させることを目的とする．

３．研究の方法

コンパクト Lie 群 K 上の基点付きループ空間ΩK はアフィン Grassmann 多様体の構造をもつことが 1970 年代に示され，これによりΩK 上で Schubert calculus を展開することが可能となった． 本研究では，Adams の意味での「複素向き付け可能な一般(コ)ホモロジー理論」E_*(-)，E^*(-)に対する Hopf 代数 E_*(ΩK)および E^*(ΩK)の構造について，従来，代数的トポロジーではほとんど考察されることのなかった Schubert calculus の視点から研究を進めていく．特に，E = H (常(コ)ホモロジー理論)，E = K (K-理論)，E = MU (複素(コ)ボルディズム理論)の場合に，幾何学的に定義された Schubert 類に対応する新しい対称関数の族を，組合せ論の手法を駆使して具体的に構成し，E_*(ΩK)および E^*(ΩK)の構造を解明する．具体的には以下の方法により研究を進めていく．U = U(∞)(SU = SU(∞))，Sp = Sp(∞)，O = O(∞)(SO = SO(∞))をそれぞれ無限(特殊)ユニタリー，シンプレクティック，(特殊)直交群とする．SU 上の基点付きループ空間ΩSU の整数係数ホモロジーのなす Hopf 代数は対称関数環Λと Hopf 代数として同型である．この同型により，幾何学的に定義されたホモロジーSchubert 類と代数的な対象である Schur 関数 s_λ(λは分割)とが対応している．その類似物として，Sp，SO 上の基点付きループ空間ΩSp，Ω_0(SO)の整数係数ホモロジーのなす Hopf 代数が，それぞれ Schur の P，Q-関数のなす環Γ'，Γと Hopf 代数として同型であることを，Kono-Kozima の結果を精密化することにより位相幾何学的に示すことができた(2010 年 11 月)．この同型により，ホモロジーSchubert 類と Schur P-関数P_λ，Q-関数 Q_λ (λは狭義の分割)が対応していることがわかる．これらは「常ホモロジー論」における結果であるが，これを「一般ホモロジー理論」に拡張することを試みる．すなわち，E_*(-)を複素向き付け可能な一般ホモロジー理論とし，E_* = E_*(一点)とするとき，ΩSU の E_*-ホモロジーは，2i 次(i = 1, 2, …)の元を生成元とする無限変数の多項式環である(Adams)．したがって対称関数環Λを係数拡大したΛ⊗E と E_*(ΩSU)との Hopf 代数としての同型が存在する．研究代表者は Kono-Kozima によるΩSp のホモロジー環の記述および Clarke によるΩSp の K-ホモロジーの記述を発展させ，ΩSp の E_-ホモロジー，さらにはΩ_0(SO)の E-ホモロジーの環構造の記述を得ており，この記述を基に，Schur の P，Q-関数のなす環 Γ'，Γの一般化として，「E-ホモロジー Schur P，Q-関数のなす環」およびその双対を定義した(2011 年 6 月)．その作り方から，これらの環はΩSp，Ω_0(SO)の E-(コ)ホモロジー環と Hopf 代数として同型である．ここでΩSp およびΩ_0(SO)の E-ホモロジーは幾何学的に定義された Schubert 類を E_*上の基底としてもつと考えられる．常ホモロジーの場合に Schubert 類と Schur 関数が対応していたことの類似として，上述の同型を通して「E-ホモロジーSchubert 類」は何らかの対称関数の族に対応しているはずである．そこで，個々のホモロジー理論の場合に，組合せ論的な手法を用いて，上述した対称関数を構成することを試みる．例えば，よく知られているように， 通常の Schur 関数は「Young 盤」を利用して組合せ論的に構成することができる．このことを雛形として，E = K (K-理論)の場合，「K-ホモロジー Schubert 類」に対応すると考えられる「K-ホモロジーSchur P，Q-関数」を，通常の Young 盤の変形(逆平面分割)を利用して構成することができる．このように，従来，代数的トポロジーにおいて利用されることがほとんどなかった組合せ論的手法を積極的に利用して，研究を進めていく．

４．研究成果

(1) B,C 型のアフィン Grassmann 多様体の一般(コ)ホモロジーの研究

①成瀬弘氏との共同研究により，ループ空間ΩSp およびΩ_0(SO)の一般(コ)ホモロジー(特に，複素(コ)ボルディズム理論)のなす Hopf 代数の，対称関数環(係数拡大したもの)の部分 Hopf 代数としての実現を与えた．さらに，これらの Hopf 代数の基底を与える Schur P，Q-関数の拡張版も構成することができた．すなわち，池田-成瀬により導入された「K-理論的 Schur P，Q-関数」の構成方法を基にして，複素コボルディズム理論 MU(-)に対して，「MU-コホモロジー(もしくは普遍) Schur P，Q-関数」(および多重パラメーター付きのもの)を構成した．また，Cauchy 型の再生核を利用して，これらの双対である「MU-ホモロジー (もしくは双対普遍) Schur P，Q-関数」も構成することができた． 構成の仕方より，MU-理論における普遍形式群演算(L，F)(L は Lazard 環，F=F(u,v)は普遍形式群)を，個々の複素向き付け可能な一般コホモロジー理論の形式群演算に特殊化することにより，通常の Schur P，Q-関数や K-理論的 Schur P，Q-関数が得られる．さらに，K-ホモロジー Schur P，Q-関数の場合には，より精密な結果として，「逆平面分割」を利用した組合せ論的な表示や「差分商作用素」を利用した構成法，さらには対称関数同士の積規則を与える「Pieri の規則」についても部分的な結果が得られている．以上の結果の主要な部分は，国際研究集会「MSJ-SI 2012 Schubert Calculus」(2012 年 7 月，大阪市立大学)において発表された．

②上記の多重パラメーター付き普遍 Schur P，Q-関数は，Ivanov による「factorial Schur P，Q-関数」の「普遍版」である．これについて，その性質を解明するための研究を行い，

通常の factorial Schur P, Q-関数が持つ「分解性」，「消失性」，「基底定理」などの基本性質を示すことができた．同じく双対普遍 Schur P, Q-関数に対しても「基底定理」など基本性質を証明した．これらの結果は，論文 M. Nakagawa and H. Naruse「Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions」(arXiv:1310.8008; Advanced Studies in Pure Mathematics に掲載予定)として発表された．
③上述したSchur P, Q-関数の「K-ホモロジー版」により，ΩSpおよびΩ_0(SO)のK-ホモロジーの環構造並びに加法基底を与えることができている．これらn→∞の結果を「有限の場合」に制限することにより，ΩSp(n)およびΩ_0(SO(2n+1))のK-ホモロジーの環構造および環としての生成元を与えた． これらの結果は，研究集会「第3回 シューベルトカルキュラスとその周辺」(2014年8月，岡山理科大学)において発表された．

(2) 普遍Schur関数に対するGysinの公式
これまでの研究により，普遍形式群を利用して，通常の Schur 関数の「普遍版」である「普遍 Schur 関数」が構成できている．通常の Schur 関数については，複素ベクトル束に付随する完全旗束の射影から誘導される Gysin 準同型を用いた特徴付けが知られているが(Fulton-Pragacz 等)，我々はこの結果を上記の普遍 Schur 関数に対して拡張することができた．Fulton-Pragacz の手法は代数幾何的であるが，本研究では代数的トポロジーの結果(Becker-Gottlieb の移送準同型(トランスファー)，Brumfiel-Madsen の公式，Bressler-Evens の公式など)が有効に利用されている．これらの結果は「日本数学会 2015 年度年会」(2015 年 3 月，明治大学)において発表された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

1. Masaki Nakagawa and Hiroshi Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions」(arXiv:1310.8008; Advanced Studies in Pure Mathematics に掲載予定

〔学会発表〕（計８件）

1. 中川 征樹，成瀬 弘，普遍 Schur 関数に対する Gysin の公式，日本数学会 2015 年度年会，2015 年 3 月 21 日，明治大学

2. Masaki Nakagawa，K-homology of affine Grassmannians，第 3 回シューベルトカルキュラスとその周辺，2014 年 8 月 27 日，岡山理科大学

3. 中川 征樹，1.旗多様体のトーラス同変コホモロジーについて 2. Kostant-Kumar の Nil-Hecke 代数について，春の代数的位相幾何学セミナー，2014 年 3 月 26 日，岡山大学

4. 中川 征樹，旗多様体上のトーラス同変コホモロジーと Schur 関数，北大幾何学コロキウム，2014 年 3 月 24 日，北海道大学

5. 中川 征樹，On the K-theory of ΩSp，2013 年度福岡ホモトピー論セミナー，2014 年 1 月 13 日，福岡大学セミナーハウス

6. 中川 征樹，成瀬 弘，古典群上のループ空間の一般(コ)ホモロジーの基底を与える Schur P, Q-関数の拡張について，日本数学会 2013 年度年会，2013 年 3 月 22 日，京都大学

7. 中川 征樹，E-ホモロジー Schur P, Q-関数と Lie 群上のループ空間について，2012 年度ホモトピー論シンポジウム，2012 年 11 月 4 日，山口大学

8. Masaki Nakagawa，K-homology of the space of loops on a symplectic group，MSJ-SI 2012 Schubert Calculus，2012 年 7 月 24 日，大阪市立大学

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suuga
ku/nakagawa/

６．研究組織
(1)研究代表者
中川 征樹（MASAKI NAKAGAWA）
岡山大学大学院教育学研究科・准教授
研究者番号：50370036

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
池田 岳（TAKESHI IKEDA）
岡山理科大学理学部・教授
研究者番号：40309539

成瀬 弘（HIRHOSHI NARUSE）
山梨大学大学院総合研究部・教授
研究者番号: 20172596