様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４０１１０

研究課題名（和文）１次元２階微分作用素のスペクトル漸近定理とその拡散過程への応用

研究課題名（英文）Asymptoic theory of the spectral functions of one-dimensional second order differential operators and its applications to diffusion processes

研究代表者
笠原　勇二（Kasahara, Yuji）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：６０１０８９７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：時間とともに変動する偶然量の数学モデルが確率過程であり、中でも拡散過程は連続的に変動する偶然量の基本的なモデルであり、多くの分野で応用されている。拡散過程は２階の微分作用素（生成作用素）で記述され、そのスペクトル関数はこの確率過程の様々な性質や量の記述に重要な役割をもつ。
本研究ではスペクトル関数の漸近的挙動と微分作用素のドリフト係数の相互関係を明らかにした。また、半直線上での議論を全直線上の話しに拡張するための道具としてタウバー型定理を得た。

研究成果の概要（英文）：Stochastic processes are mathematical models which describe various quantities varying randomly. The diffusion process is a basic stochastic process that varies without jumps, and it has applications in various fields. A diffusion corresponds to a second-order differential operator (generator) and its spectral function plays an important role to describe various properties and quantities of the stochastic process.
In our research we clarified the relation between the asymptotic behavior of the spectral function and that of the drift-coefficient of the operator. We also obtained some Tauberian theorems which are tools to extend results on the half line to those of the full line.

研究分野：数学（確率論）

キーワード：拡散過程　スペクトル関数　正則変動関数　タウバー型定理　推移確率密度　２階微分作用素

１．研究開始当初の背景

(1) 時間とともに変動する偶然量の数学モデルが確率過程で、その理論は数学・物理に限らず、工学、経済、生物などの多くの分野で広く活用され、今日では必須の道具となっている。その確率過程の最も代表的かつ基本的なものはブラウン運動（ウイナー過程）であり、古くから非常に詳しい研究がなされている。

(2) ブラウン運動の研究が進むと、次のステップとして考えられることは、それらの研究結果をブラウン運動以外の確率過程にも拡張することであろう。ブラウン運動の拡張の方向性は幾つかあるが、１つの一般化は拡散過程と呼ばれるもので、連続的に運動する粒子や連続的に変動する偶然量の数学モデルである。拡散過程は正規過程、加法過程、マルチンゲール、定常過程などと並び、最も基本的な確率過程の１分野といえる。

(3) この‘拡散過程’は一般に拡散係数 $a(x)$ (>0) とドリフト係数 $b(x)$ を用いた２階の微分作用素

$$a(x)\frac{d^2}{dx^2}+b(x)\frac{d}{dx}$$

で表現されるが、拡散過程の様々の性質を研究する際、それらの性質が上記の２つの係数 $a(x), b(x)$ とどのように関係しているかを明らかにしていくのがこの分野の大きな関心事である。

２．研究の目的

(1) 本研究の目的は、拡散過程への応用を念頭に、２階の微分作用素のスペクトル関数の漸近挙動（とくに原点近傍での挙動）を調べることである。２階の微分作用素の代表例は（変形）ベッセル作用素であるが、この場合は推移確率など色々な量が特殊関数を用いて具体的に表現出来るのでスペクトル関数も具体的に計算されていて、その結果はよく知られている。そこで、ベッセル作用素の係数を僅かに摂動させたとき、スペクトル関数やそこから計算される諸量も少しだけ変動することは容易に想像がつくが、それを定性的・定量的に求めることを本研究の目的とする。逆問題にも注意を払う。

(2) 実はこの問題は、２階微分作用素をスケール変更により１階微分の項が消える形（実質的にフェラーの標準形）にした枠組みではかなり研究が集積されてきている。そこで本研究では次のステップとして、より具体的かつ直感的な理解がしやすいように、スケール変換する前の通常の微分作用素のままで条件が記述できるようにした点が新しく、また有用と思われる。

(3) 既に述べたとおり、拡散過程は２階の微分作用素で記述されるので、スペクトル関数の漸近挙動を調べることはそのまま拡散過程の時間無限大での各種の性質を調べることに応用される。本研究では、とくに推移確率密度の漸近挙動や first hitting time への応用を考えた。また、従来の研究が片側（半直線上）での議論に限定することが多かったが、本研究では両側の場合への適用方法についても考える。

３．研究の方法

(1) 中心となる道具は M.G.Krein や S.Kotani によって発展してきたスペクトル理論である。これらは string とスペクトル関数の１対１対応を述べた理論で、非常に強力な道具である。これらを使えば string の漸近挙動とスペクトル関数の漸近挙動との対応関係も導くことができる。よって本研究では、ドリフト型の拡散過程について、生成作用素をフェラーの標準形経由で string の話しに持ち込んだときの、‘ドリフト係数’と‘string’の漸近的挙動の相互関係を明確にすればよいことがわかる。この研究では正則変動関数・緩慢変動関数の詳しい知識が必要であるが、これは研究代表者の得意分野である。なお、string のスペクトル理論については第一人者といえる S.Kotani 氏に協力を仰いだ。

(2) もう１つの道具は、タウバー型の定理である。測度の末尾部分の漸近挙動を調べるには、ラプラス変換やスチルチェス変換の漸近挙動の話しに持ち込むのが古くからの方法であり、タウバー型定理と呼ばれる。Hardy-Littlewood によるものが古典であり、それを一般化した Karamata によるものが強力であり標準的で

ある。本研究ではこれに多少の変更・拡張を加えて利用する。

４．研究成果

(1) （スペクトル関数の）Stieljes 変換の調和平均に関するタウバー型定理について次のような結果を得た。

$\sigma_i : [0,\infty) \to [0,\infty)\,(i=1,2)$ を右連続な非減少関数とするとき、 Stieltjes 変換

$$h_i(s) = \int_{[0,\infty)} \frac{d\sigma_i(\xi)}{s+\xi}, \quad s>0$$

について、その調和平均（の定数倍）

$$\frac{1}{h(s)} = \frac{1}{h_1(s)} + \frac{1}{h_2(s)}$$

を考える。この $h(s)$ もまたある $\sigma(\xi)$ の Stieltjes 変換の形をしているが、このとき $\sigma(\xi)$ の $\xi \to +0$ の漸近挙動と $\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi)$ の $\xi \to +0$ のときの漸近挙動の相互関係はどうなっているかを考える。この問題は１次元拡散過程の研究において、$(-\infty,\infty)$ 上の拡散過程の話しを $(-\infty,0]$ 上の拡散過程と $[0,\infty)$ 上の拡散過程の話しに帰着するときに現れる問題である。

$R_\alpha(0)$ で原点の近傍で α 次正則変動関数全体を表すことにする。また、

$$\ell_1 = h_1(+0), \quad \ell_2 = h_2(+0), \quad \ell = h(+0)$$

とおく。$\ell_1 < \infty$ と $\ell_1 = \infty$ は、対応する拡散過程が一時的（transient） と 再帰的（recurrent） であることに対応する。もちろん ℓ_2, ℓ についても同様である。さらに

$$p = \frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}\Big(=\frac{\ell}{\ell_1}\Big), \quad q = \frac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2}\Big(=\frac{\ell}{\ell_2}\Big)$$

とおく。ただし、右辺が意味をもつ場合に限る。大雑把にいって、p, q はそれぞれ h_1, h_2 に対応する拡散過程が 1 側と 2 側の無限遠点に収束する確率である。

本研究で得られた成果の主要部分は次の通りである。

〔定理〕[Case I：$\ell_1 < \infty, \ell_2 < \infty$ のとき]

$\varphi \in R_\alpha(0)\,(\alpha \ge 1)$ とするとき、次のことが成り立つ。

(i) $\sigma(\lambda) \sim \varphi(\lambda)\,(\lambda \to +0)$ である必要十分条件は

$$p^2\sigma_1(\lambda) + q^2\sigma_2(\lambda) \sim \varphi(\lambda) \quad (\lambda \to +0).$$

(ii) とくに $\sigma_i(\lambda) \sim c_i\varphi(\lambda)\,(\lambda \to +0), \quad i = 1,2,\ c_1, c_2 \ge 0\,(c_1+c_2>0)$ であれば

$$\sigma(\lambda) \sim (c_1p^2 + c_2q^2)\varphi(\lambda) \quad (\lambda \to +0).$$

〔定理〕[Case II：$\ell_1 = \ell_2 = \infty$ のとき] $\varphi \in R_\alpha(0)$ $(0 \le \alpha \le 1)$ とする。このとき $\sigma_i(\lambda) \sim c_i\varphi(\lambda)$ $c_i \in (0,\infty)$, $(i=1,2)$ であれば

$$\sigma(\lambda) \sim \frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\varphi(\lambda) \quad (\lambda \to +0).$$

上記以外のケースについても結果は得られたが、多少複雑になるのでここでは割愛する。

タウバー型の定理は解析学における基本的な道具の１つであるので、上記のような結果を準備しておくことは、拡散過程への応用に限らず、色々な方面での利用が期待される。

(2) 次のような形の生成作用素をもつ拡散過程の拡散過程のスペクトル関数と確率密度の漸近挙動について結果を得た。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}\right)$$

確率論的には、ブラウン運動にドリフトが掛かった形の拡散過程である。とくに $b(x) = (\rho-1)/x$ のときがベッセル過程であり、この場合は推移確率密度関数をはじめとする諸量が変形ベッセル関数などの特殊関数を用いて具体的に表現出来、それらの漸近挙動はベッセル関数等の性質を調べることに帰着される。しかし、この方法では $b(x) = (\rho-1)/x$ 以外の場合には全く適用出来ない。そこで本研究ではこれを一般化して

$$b(x) = (\rho-1)/x + o\big(1/x\big)$$

の場合を考え、$b(x)$ の遠方での挙動と推移密度関数の時間無限大での挙動との相互関係を考える。ベッセル過程の摂動問題と捉えてもよい。

具体的には、標準測度に関する推移確率密度を $p(t,x,y)$ とするとき、次の結果を得た。推移確率の言葉で主結果を述べるが、推移確率密度とスペクトル関数の関係からスペクトル関数の話しに読み替えることは容易である。

〔定理〕 $\rho > 0$ とする。$t \to \infty$ のとき

$$p(t,x,y) \sim \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\int_1^{\sqrt{t}} b(x)\,dx\right\}$$

ここに $C = \frac{1}{2^{\rho/2}\Gamma(\rho/2)}$ である。

この定理は、$b(x)$ が遠方で（正または負の）定符号であるという条件を付加すれば、実は逆も成り立つ。

なお、$\rho \le 0$ の場合についても類似の結果が得られた。

(3) 半直線 $[0,\infty)$ 上の、$[0,\infty]$–値非減少関数を string といい、string m に対して 2 階の微分作用素 $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ のスペクトル関数 σ を考える。この m と σ の対応は M.G.Krein の対応として知られていて、この対応は１対１である。これに関連して、m と σ の漸近挙動の対応関係については、$\sigma(\lambda) \sim C\lambda^{\alpha}$ （あるいは緩慢変動関数 L を入れて $\sigma(\lambda) \sim L(\lambda)\lambda^{\alpha}$ となる条件は $0 < \alpha < 1$ の場合が研究代表者によって、また $\alpha > 1$ の場合は S.Kotani によってほぼ完全な結果が得られている。そこで本研究では残るケース ($\alpha = 1$ の場合）を研究した。得られた結果は次の通りである。

〔定理〕L を緩慢変動関数とし、その de Bruijin conjugate を L^* とする。このとき次の 2 条件は同値である：

$$\sigma(\xi) \sim \frac{\xi}{L(1/\xi)} \quad (\xi \to +0);$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{m^{-1}(\lambda x) - m^{-1}(\lambda)}{L^*(\lambda)} = \log x, \quad x > 0.$$

なお、後者のための十分条件は、m^{-1} が連続微分可能で

$$(m^{-1}(x))' \sim \frac{L^*(x)}{x} \quad (x \to \infty).$$

となることである。

例を挙げると、 $m(x) \sim Ax^{\gamma}e^{Bx}\,(x \to \infty)$ のとき

$$\sigma(\xi) \sim (1/B)\xi \quad (\xi \to +0)$$

である。

一般に、確率過程を適当に正規化しながら時間無限での極限を考えるとき、極限過程が存在するならばそれは自己相似性をもつことがよく知られている。それぞれの自己相似過程に対し、そこに収束する確率過程を「牽引域」という。拡散過程の場合は、自己相似性をもつのはベッセル過程であり、従ってベッセル過程が種々の極限定理に関係するするのは明らかであり、その牽引域を求めることは意義がある。本研究では表面的には推移確率に焦点を当てたが、実質的にはより一般に、ベッセル過程の牽引域を求めていることになり、他の極限定理の理解にも資すると思われる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計６件）

① Kasahara Yuji; Kotani Shin'ichi、Tauberian theorem for harmonic mean of Stieltjes transforms and its applications to linear diffusions. Osaka J. Math. 査読有、53 巻、2016、221–249.

② Kasahara Yuji; Kotani Shin'ichi、 Diffusions with Bessel-like Drifts. Kyoto J. Math. 査読有、55 巻、2015、773–797.

③ Kasahara, Yuji; Kumanda, Kosuke、 On the maximum of a one-dimensional diffusion. Kobe J. Math. 査読有、30 巻、2013、33–47.

④ Kasahara Yuji、Asymptotic Behavior of the Transition Density of an Ergodic Linear Diffusion. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読有、48 巻、2012、565–578.

⑤ Kasahara Yuji; Tahara Genki、 Limiting distribution of the maximum of a null recurrent diffusion process, Kodai Math. J. 査読有、 35 巻、2012、629–641.

⑥ Kasahara, Yuji、 Spectral function of Krein's and Kotani's string in the class Γ . Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 査読有、88 巻、2012、173–177.

〔学会発表〕（計４件）

① 笠原勇二、「Bessel Like Diffusion の first hitting time について」、統計数理研究所共同研究集会、平成２７年１２月４日統計数理研究所、東京都立川市

② 笠原勇二・小谷眞一、「Bessel-like diffusion の推移密度の漸近挙動」、日本数学会年会統計数学分科会、平成２７年３月２１日明治大学、東京都千代田区

③ 笠原勇二、「Stieltjes 変換の調和平均に関するタウバー型定理、統計数理研究所共同研究集会、平成２６年１１月２８日統計数理研究所、東京都立川市

④ 笠原勇二、「Bessell 過程に近い拡散過程」、統計数理研究所共同研究集会、平成２５年１１月１２日統計数理研究所、東京都立川市

〔その他〕
報告集（査読なし）（計３件）

① 笠原勇二、「Bessel like diffusion の first hitting time について」、統計数理研究所共同研究リポート３５２ (2016.2), 56–62.

② 笠原勇二、「Stieltjes 変換の調和平均に関するタウバー型定理」、統計数理研究所共同研究リポート３５０ (2015.2), 28–33.

③ 笠原勇二、「Bessel 過程に近い拡散過程について」、統計数理研究所共同研究リポート３２８ (2014.2), 72–77.

６．研究組織

(1) 研究代表者
笠原　勇二 (KASAHARA, Yuji)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：60108975

(2) 研究分担者
梁　松 (LIANG, Song)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60324399