

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540117

研究課題名(和文)局所変形を用いた曲面上のグラフの多色彩色に関する研究

研究課題名(英文)Researches on polychromatic coloring of graphs on surfaces by local transformations

研究代表者

中本 敦浩(Nakamoto, Atsuhiko)

横浜国立大学・環境情報研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20314445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、曲面上のグラフの多色彩色に関する研究テーマを扱った。この概念はいわゆる「美術館問題」を動機として定義されたものであり、私の研究の糸口は、3-正則平面2部グラフの多色4-彩色性をグラフの局所変形を用いて解くことであり、本研究は、そのアナロジーとして、その他の曲面の偶角形分割に同様の事実が成立するかを扱った。結果的には、当初想定していた問題はすべて、予想通りに解くことができた。一方、得られた結果がグラフの拡張問題に結びつき、曲面のZ2ホモロジーやグラフのサイクルスペースなどの代数的手法を用いる新たな研究の方向性を見つけた。本研究では当初の予想を大きく超える成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：In this research, we dealt with polychromatic coloring of graphs on surfaces. This notion was defined in relation with the so called "Art gallery problem", and my research purpose is to firstly solve the polychromatic 4-chromaticity of cubic bipartite plane graphs by using local transformations, and secondly to solve the similar problems for even-sided maps on other surfaces as its analogy. As a result, we could solve all problems given in the application as we expected. On the other hand, we found a relation of our result to the extension problem of graphs, and got a new direction for the research to use an algebraic method such as a Z2-homology of a surface and the cycle space of graphs. We have been able to obtain much more than we expected before.

研究分野：グラフ理論

キーワード：局所変形 曲面 グラフ彩色 三角形分割 四角形分割 偶三角形分割

1. 研究開始当初の背景

曲面上のグラフ G の多色着色 (多色 k -着色) とは、 G の各面にすべての色が現れるように G の頂点を k 色で色分けすることである。(多色 k -彩色では、上の条件に加え、同色の頂点が隣接してはいけない。) 平面グラフのこのような着色は、離散幾何における「美術館問題」を動機として定義されたものであり、幾何学への応用、その他の曲面上のグラフの同様の彩色問題への発展、さらにその証明手法としてのグラフの局所変形理論の構築へと進展するものであり、理論的に広範囲をカバーする興味深い研究テーマである。

美術館問題とは、「任意の n 角形的美術館を見張るために監視カメラは何台必要であるか」というものである。この問題は平面上の「可視性」を扱う幾何学に属し、これまでにたくさんの関連研究が知られている。この美術館問題に対する Fisk のエレガントな解答は、「任意の極大外平面グラフは 3-彩色可能である」という平面グラフの彩色理論の結果から、監視カメラは $n/3$ 台以下で十分であることを結論するものであった。(また、この評価が最良であることも簡単に証明することができる。)

2011 年、私は Horev, Katz, Krakovski たちによる 3-正則平面 2 部グラフの多色 4-着色性に関する結果を目にした。その定理は単純で美しいが、主張は少々弱く、証明は冗長かつ複雑だった。そこで、その定理の主張を強め、かつ、証明を簡単にできないかと考えてみると、私たちの得意とするグラフの局所変形の双対理論が極めて有効であることがわかった。ゆえに、私は本申請により、科学研究費補助金の援助を受け、グラフの局所変形の手法を用いて、曲面上のグラフの多色着色に関する問題とその関連問題を一気に解決しようと考えた。

近年、私は「硬い幾何学」と「やわらかい幾何学」との間にある研究テーマがしばしば高いレベルの研究になるという実感を持っており、本提案も「グラフ理論」と「離散幾何」を両輪とする新たな研究分野を切り開くことができると予想していた。

2. 研究の目的

まず、Horev, Katz, Krakovski たちの 3-正則平面 2 部グラフの結果に対して、グラフの局所変形理論を用いて、簡潔な結果を与えることを目標とした。そのために、グラフのある拡張変形が多色 k -彩色性を保存するかどうかを解明する必要がある。そして、ある局所変形がグラフの多色 k -彩色性を保存することが確かめられれば、あるグラフの族 F において、その変形に関する極小グラフを列挙され、それらがすべて多色 k -彩色可能ならば、 F に属するすべてのグラフもそうであることが証明できる。

また、Horev, Katz, Krakovski たちの定理に、グラフの局所変形を用いた簡潔な証明が与えられれば、そのアナロジーとして以下の問題が考えられる：

- (1) 射影平面の 3-正則偶角形分割が、奇数段のメビウス梯子と同型でなければ、多色 4-彩色を持つか。
- (2) トーラスの 3-正則偶角形分割が多色 4-彩色を持つか。

(1)(2) を解決するには、それぞれの曲面上の 3-正則偶角形分割に対して、それぞれのグラフは、ある有限個の具体的なグラフから、有限個のグラフ変形を繰り返すことにより得られることを証明しなければならない。射影平面のグラフ変形に関してはすでに類似の研究があるが、トーラスについてはまったく未知の問題であり、これが完成すれば大きなインパクトを持つのではないかと思われていた。また、トーラスの次はクラインの壺で同様の問題が考えられるが、場合分けは大幅に増えそうである。

さらに、曲面の偶角形分割だけでなく、三角形面を持たない平面グラフが多色 4-彩色を持つかどうか(これには奇プリズムが反例となることが知られているが、これのみが反例なのか)、また、グラフを三角形分割や四角形分割に限定して、その多色彩色性にどのようなことが成り立つか、などに問題意識を持ちながら研究をスタートさせた。

私たちは、これまで一貫して「グラフの局所変形」に関連する何らかの研究を続けてきており、本問題では、私たち独自の切り口と手法により、何らかの新しい理論が構築できるのではないかと考えていた。

3. 研究の方法

平面の 3-正則 2 部グラフの多色 4-彩色の定理を完成させる。そして、平面の場合の証明を模倣し、射影平面上の同様の定理の完成を試みる。

次にトーラス上のグラフについて考えると、曲面のオイラー数の関係から、本問題ではこれまでと同様の手法を用いることができないことがわかる。そのため、当面、その解決を目標として文献整理や情報収集を行い、問題解決に取り組む。(この証明の最終段階では膨大な場合分けが必要となるため、グラフの同型判定等の作業に計算機処理を用いる。) その問題が解決されれば、本計画の大部分が達成され、さらに得られた生成定理のいろいろな応用 (N -変形や臨界 5-染色性) を検討する。

証明の完成やその議論の検証にあたり、他大学の研究者との議論の機会を設けるようにする。また、国内外で開催される学会や研究集会に参加し、情報交換の機会を多く持つようにする。

4. 研究成果

まず、本研究の糸口となった Horev, Katz, Krakovski たちの 3-正則平面 2 部グラフの多色 4-彩色に関する定理は、平面偶三角形分割の生成定理を用いることにより、簡潔な証明を与えることができた。

また、この証明は曲面上での局所変形を扱うため、それらの議論は曲面に依存しない。したがって、2 で述べた問題 (1) (2) については、射影平面とトーラス上の多重極小偶三角形分割の完全リストを決定することにより、その双対グラフ (3-正則偶角形分割) を考えることにより、それらの問題に肯定的な結果を与えることができた。一方、クラインの壺に関する定理は、トーラスの場合以上に多くの場合分けが発生することが予想され、今後の課題として残っている。

以上は、本研究テーマを掲げた時点で予想していた問題に関する研究成果であるが、研究を進展させていく中で、ある新しい研究の方向性が見えるようになり、それらを追求することで、曲面の \mathbb{Z}_2 ホモロジーやサイクルスペースなどの代数的手法が当該問題によく馴染むことがわかってきた。

特に、以下に示した問題について研究成果を得た：

- (1) 任意の閉曲面の多色 3-彩色可能四角形分割の特徴付け。
- (2) 任意の閉曲面の四角形分割が、辺の追加により、何通りの偶三角形分割に拡張するか。
- (3) 任意の閉曲面の多色 4-彩色可能四角形分割の特徴付け。
- (4) いくつかの曲面で三角形分割が多色 2-彩色可能となるための条件の決定

(1) の問題については、もともと、四角形分割と曲面上の可縮閉曲線との交差関係を用いて定理を述べようとしていたが、曲面の \mathbb{Z}_2 ホモロジーやグラフのサイクルスペースなどを用いて、主張が明確に述べられることがわかった。

(2) の問題は、多色彩色とは少々異なるものだが (1) を含む形で、「四角形分割が、辺の追加で、偶三角形分割に拡張されるか」という四角形分割の拡張問題を完全に述べることに成功した。この問題は、向き付け可能曲面に関しては部分的解決があったが、私たちはすべての曲面でその問題を完全に解決した。代数的な処理の有用性はその研究の中で見つけられた。

(3) 多色 4-彩色可能四角形分割は、本研究とはまったく別の文脈から、平面でのみ特徴付けられていたが、本研究では、(2) で述べた代数的手法により、任意の閉曲面の上で多色 4-彩色可能四角形分割を決定した。さらに、興味深いことに、本問題はいわゆる「四色定理」やその同値問題「3-正則平面グラフ

が 3-辺彩色可能であるか」と密接な関係を持つことが突き止められ、大変興味深いものとなった。

(4) 本問題では (2) の逆問題を考える：つまり「偶三角形分割 G は全域四角形分割 Q を持つか」を考える。偶三角形分割 G に Q が存在することは明らかであるが、 Q が 2 部グラフとして選択できるかは明らかではない。そして、 Q が 2 部グラフであれば、 G は多色 2-着色可能である。本研究では、いくつかの曲面で三角形分割が多色 2-彩色可能となるための条件を見つけることができた。コン結果も、平面グラフに関する結果と照らし合わせると大変興味深く、今後の研究へとつながりそうである。

以上のように、本研究では計画当初に予想していた目標を大きく上回る研究成果を得ることができた。

当初、「グラフ理論」と「幾何」を両輪にバランス良い研究を構想していたが、前者のみの著しい発展をさせることができた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 17 件)

1. R. Mukae, A. Nakamoto, Y. Suzuki, 3-Polychromatic quadrangulations on surfaces, *Congr. Numer.* 219 (2014), 43--51.
2. M. Nagashima, A. Nakamoto, S. Negami, Generating 3-connected quadrangulations on surfaces, *Ars Combin.* 116 (2014), 371-384.
3. S. Kato, R. Mori, A. Nakamoto, Quadrangulations on 3-colored point sets with Steiner points and their winding number, *Graphs Combin.* 30 (2014), 1193--1205.
4. A. Boulch, E. Colin de Verdiere, A. Nakamoto, Irreducible triangulations of surfaces with boundary, *Graphs Combin.* 29 (2013), 1675--1688.
5. N. Matsumoto and A. Nakamoto, The number of diagonal transformations in quadrangulations on the sphere, LNCS 8296, Springer (J. Akiyama, M. Kano, T. Sakai (Eds.): TJJCCGG 2012), 110--119, 2013.
6. V. Alvarez, A. Nakamoto, Colored quadrangulation with Steiner points, LNCS 8296, Springer (J. Akiyama, M. Kano, T. Sakai (Eds.): TJJCCGG 2012), 20--29, 2013.
7. M. Kobayashi, A. Nakamoto, T. Yamaguchi, Polychromatic 4-coloring of cubic even embeddings on the projective plane, *Discrete Math.* 313 (2013), 2423--2431.

8. A. Nakamoto and S. Tsuchiya, HISTs in triangulations on surfaces, AKCE Int. J. Graphs Combin. 10 (2013), 1--14.
9. J. Fujisawa, A. Nakamoto, K. Ozeki, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with a partite set of degree four vertices, J. Combin. Theory, Ser. B 113 (2013), 46--60.
10. J. Caceres, C. Cortes, C. Grima, M. Hachimori, A. Marquez, R. Mukae, A. Nakamoto, S. Negami, R. Robles, J. Valenzuela, Compact Grid Representation of Graphs, Lecture Notes in Computer Science 7579 (2012).
11. D. Kral', B. Mohar, A. Nakamoto, O. Pangrac, Y. Suzuki, Coloring Eulerian triangulations of the Klein bottle, Graphs Combin. 28 (2012), 499--530.
12. A. Nakamoto, K. Ota, K. Ozeki, Book embedding of toroidal bipartite graphs, SIAM J. Discrete Math. 26 (2012), 661--669.
13. A. Nakamoto, S. Tsuchiya, On geometrically realizable Mobius triangulations, Discrete Math. 312 (2012), 2135--2139.
14. A. Nakamoto, Y. Suzuki, Y-Rotations in k-minimal quadrangulations on the projective plane, J. Graph Theory 69 (2012), 301--313.
15. E. Horev, M.J. Katz, R. Krakovski, A. Nakamoto, Polychromatic 4-coloring of cubic bipartite plane graphs, Discrete Math. 312 (2012), 715--719.
16. A. Nakamoto, S. Tsuchiya, A face of a projective triangulation removed for its geometric realizability, Discrete Comp. Geom. 47 (2012), 215--234.
17. A. Nakamoto, K. Ozeki, Hamiltonian cycles in bipartite quadrangulations on the torus, J. Graph Theory 69 (2012), 143--151.

[学会発表](計 21 件)

1. A. Nakamoto, Book embedding of graphs on surfaces, Forty-sixth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University, USA, 2014.3.2--6.
2. A. Nakamoto, Book embedding of graphs embeddable on surfaces, ACOTTA2014, Ixtapa, Mexico, 2014.11.24-28.
3. 中本敦浩, Odd minors in even embeddings on surfaces, 第 24 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2014.11.7-8.
4. 中本敦浩, Odd minors in even embeddings on surfaces, 離散数学とその応用研究集会, 新潟総合テレビ・ゆめディア, 2014.8.20--22.
5. (招待講演) A. Nakamoto, Coloring maps on surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics, Minneapolis, USA, 2014.6.16--19.
6. A. Nakamoto, Minor relation in quadrangulations on the sphere, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics, May 17 --21, 2014 Nihon University
7. (招待講演) A. Nakamoto, Polychromatic number of graphs on surfaces, The 3rd Taiwan-Japan Conference on Combinatorics and its Applications, National Chiayi University, Taiwan, 2014.3.21--23.
8. A. Nakamoto, 3-Polychromatic quadrangulations on surfaces, Forty-Fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University, USA, 2014.3.3--7.
9. 中本敦浩, Independence sets and coloring of graphs on surfaces, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2013.12.19--21.
10. A. Nakamoto, Independence sets and coloring of graphs on surfaces, The 25th workshop on topological graph theory, 横浜国立大学, 2013.11.18--22.
11. (招待講演) A. Nakamoto, Polychromatic coloring of graphs on surfaces, NIMS seminar in combinatorics, National Institute of Mathematical Science (Daejeon, Korea), 2013.9.30,10.1
12. 中本敦浩, Grunbaum coloring of Eulerian triangulations on surfaces, 応用数学合同研究集会, 日本数学会, 愛媛大学, 2013.9.25.

13. A. Nakamoto, Grunbaum coloring of Eulerian triangulations on surfaces, Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications (Kocice, Slovakia), 2013, July 7-13.

14. A. Nakamoto, Generating Eulerian triangulations on surfaces, Geometrical and Topological Graph Theory, Bristol (United Kingdom), 2013.4.15-19.

15. 中本敦浩, 3-Polychromatic quadrangulations on surfaces, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2012.12.20-22.

16. A. Nakamoto, Colored quadrangulations with Steiner points, Thailand-Japan Joint Conference on Computational Geometry and Graphs (TJCCGG2012), Srinakharinwirot University (Bangkok, Thailand), Dec 6-8, 2012.

17. A. Nakamoto, 3-polychromatic quadrangulations on surfaces, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific Center, Hawaii, 2012. 11.27-30.

18. 中本敦浩, 3-Polychromatic quadrangulations on surfaces, 第24回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2012.11.17-18.

19. (招待講演) 中本敦浩, 「曲面上のグラフの多色彩色について」, RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2012.7.18-20.

20. (招待講演) A. Nakamoto, Polychromatic number of graphs on surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics, Dalhousie University, Canada (2012.6.18-22).

21. A. Nakamoto, Odd minors in even embeddings on surfaces, International Conference on Cycles in Graphs, Vanderbilt University (Nashville, United States), 2012, May 30-Jun 2.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
中本敦浩 (Atsuhiko Nakamoto)
横浜国立大学・環境情報研究院・准教授
研究者番号: 20314445

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし