様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４５４０１２０

研究課題名（和文）非古典述語論理のための代数的意味論の再構築

研究課題名（英文）Reconstruction of algebraic semantics for non-classical predicate logics

研究代表者
鈴木　信行（Suzuki, Nobu-Yuki）

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：６０２１６４２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：古典論理の代数的意味論は、ブール代数と呼ばれる代数系（19世紀のG. Booleにちなんで命名）によって与えられた。ブール代数の完備化によって、古典的述語論理を捕らえられることが知られている。しかし、これを非古典述語論理に拡張することは、困難であった。
本研究では、完備化ではなく、圏論での随伴（adjoint）の概念を利用して、いくつかの非古典述語論理の代数的意味論を再構築し、その応用を示した。

研究成果の概要（英文）：Algebraic semantics for classical logic was given by an algebraic system called Boolean algebra (named after G. Boole in 19th century). It is known that the completion of Boolean algebra can capture classical predicate logic. However, it has been hard to extend this method to non-classical predicate logics.
In this research, we reconstructed algebraic semantics for some non-classical predicate logics by making use of the notion of adjoints in category theory, not by completion; and we presented its applications.

研究分野：数学（数理論理学・非古典論理）

キーワード：非古典論理　代数的意味論　述語論理　クリプキ意味論

１．研究開始当初の背景

様相命題論理や超直観主義命題論理などの非古典命題論理においては、代数的意味論が自然に導入・定義され、普遍代数(universal algebra)の分野と互いに影響を与えあいながら、20 世紀に大きく発展した。

しかし、先人の数多の努力にもかかわらず、非古典述語論理の代数的意味論は、命題論理の場合のような有力な道具立てにならず、成果は限られていた。この困難な状況は今世紀に入っても大きく進展していなかった。ところが、超直観主義述語論理の代数的意味論は、ここ十年程度に現れた関連分野の２つの結果を見渡せば、注目すべき状況になっていた。

部分構造命題論理の結果:
証明論的議論の援用（カット消去との関連）によって、Dedekind-MacNeille 完備化が、様々な完備化の中で一般的なものであることが理解される（引用文献①)。

ハイティング代数での結果:
代数的手法によって、Dedekind-MacNeille 完備化について閉じているバラエティは、自明なものの他には唯２つ（ハイティング代数とブール代数）のみであることが示された（引用文献②)。

これらの結果を統合して見れば、完備化によって述語拡大の代数的意味論が構築できる可能性のある超直観主義命題論理は、自明なものを除いて唯２つに限られることが明らかになった。非古典命題論理では自然に定義され発展した代数的意味論が、非古典述語論理では成果が限られていた理由がこれだったのである。こうした状況は、命題論理の代数的意味論を「束の完備化」を通して述語論理に拡張する、という手法の限界を示している。この限界を乗り越えたい。そのため、引用文献③の圏論的道具立てを積極的に活用することを考えるに至った。そして、これを通して非古典命題論理の代数的意味論での技術や成果を非古典述語論理の研究に適用したいと考えた。

２．研究の目的

これまでの代数的意味論の研究では、∧（かつ）と∨（または）を束（lattice）の meet と join で解釈することが定番である。そこから自然に∀（すべての対象に対して…である）や∃（ある対象が存在して…である）を、次の「完備化の要請」に従って解釈する。

C: 完備性の要請
∀は無限個の∧、∃は無限個の∨となるように解釈せよ。

そして、この要請を束論的な完備化で実現してきた。典型的な例は、古典述語論理におけるブール代数の完備化である。しかし、１の「研究開始当初の背景」で示したように、完備化が有効なのは、実は極めて例外的な場合である。この状況を克服することにチャレンジしたい。代数的意味論と対を成すクリプキ意味論（クリプキ枠意味論、クリプキ層意味論など）では、上記の「完備性の要請」は、個体領域の族に相対化された解釈になる（この「対をなす」は、可換環に対するザリスキ位相をイメージせよ。)。クリプキ意味論では、圏論的手法が数学的道具として積極的に使われており、他の数学的に重要な諸概念と関連付けられる。例えば、アーベル群に値を持つ前層は、直観主義的述語論理上でのアーベル群論のクリプキ層モデルとなり、その準同型から定義される自然変換は、クリプキ意味論でのｐ－モルフィズム(p-morphism)という概念に相当する。

本研究では、∀と∃を適切な射の adjoint として自然に解釈できる圏論的道具立ての活用による代数的意味論の構築を考え、既存の代数的意味論を利用した ω圏（の様なもの）として実現することを試みる。このアイデアで非古典述語論理の代数的意味論を再構築したい。それによって、既存の代数的意味論での成果を、完備化が無効な場合に拡張できると考える。そして、この道具立てで、非古典述語論理の未解決問題にチャレンジする。（具体的な問題は、繰り返しを避けるため、４の「研究成果」で記述する。）

３．研究の方法

（１）代数的意味論において、C の「完備性の要請」ではなく、圏論的な手法で∀と∃の解釈を記述することを考える。∀の右導入規則と∃の左導入規則の適用例をみてみる:

$$\frac{A \;\rightarrow\; B(a)}{A \;\rightarrow\; \forall x B(x)} \qquad \frac{B(a) \;\rightarrow\; A}{\exists x B(x) \;\rightarrow\; A}$$

(固有変数条件)自由変数aは下式に現れない。

この適応例での上式の A をφA 書き、変数の部分を省略して書くと:

$$\frac{\phi A \;\rightarrow\; B}{A \;\rightarrow\; \forall B} \qquad \frac{B \;\rightarrow\; \phi A}{\exists B \;\rightarrow\; A}$$

即ち、∀と∃は、φの右および左随伴（right and left adjoints）とみなせる。

この「観察」を実現でき、固有変数条件が自動的に満たされような φを定めることが、∀と∃の解釈を導く。よって、次の要請が自然に現れる。

A: adjoint 性の要請
∀と∃が右および左随伴となり、固有変数条件を満たすφを構成せよ。

この素朴とも言えるアイデアを圏論的な道具立ての上に代数的に実現し、完備化を用いない adjoint による代数的意味論として構築したい。

（２）上記（１）のアイデアを実現するために、図式を観察してみると、φは、n -1 変数の A を形式的に n 変数の A に持ち上げていることが解る。このφは、Frege の素朴な意味での命題関数(propositional function)に自然に作用する作用子と見ることができる。本研究では、Frege のものよりもやや整備された Russell の意味での命題関数を変数のコンテクストに注目して考えることにした。これより、φは単に自明ではなくなり、固有変数条件の組み込みをしつつ、明確な数学的な実現を与えることを考える。(この部分の実行が一番困難と予想されたので、時間をかけて実例での計算を行った。)。

φは、実際には関手の添え字づけられた族で、自然に圏の構造を持つ。さらに、添え字の部分が自然にω×ωの圏の構造を持つ。そして、Beck の条件(monadicity)が自然に記述される。そうすれば、我々のアイデアはωのなす圏からの真理値関手のような形で実現できると期待される。

（３）これらの点を明らかにして、既存の代数的意味論の対象であるハイティング代数にに値を持つω圏（の類似物）からの関手として実現することを試み、∀と∃を adjoint として自然に解釈できる代数的意味論を構築につなげる。

（４）上記の（１）～（３）の方法によって、既存の命題論理の代数的意味論での成果を、完備化が有効でない述語論理の場合に拡張することを目指す。さらに、この道具立てを応用して、非古典述語論理における未解決問題にチャレンジした。

（５）具体的には、まず適切な準備的考察を行い、それをふまえて国内外の研究者とのディスカッションにちからを入れ、適宜中間的な成果を発表しながら、段階的にすすめた。

４．研究成果

（１）上記３「研究方法」の（２）に関しては、関数記号や個体定数記号を持つ言語で実行すると計算上の手間が大きいことが予想されたため、いわゆる純粋第 1 階言語(pure first-order language)で実行することとした。これは下記の応用をするためには十分な設定である。そのうえで、各自然数を対象(object)とし、その自然数の対の間での置換(permutation)を射(arrow)とする圏を考え、これが自然に定義する変数の番号付け替えを考えることにより、変数の有限列$(x_0,\cdots,x_{n-1})$と置換σ： m → n に対して、変数の有限列$(x_{\sigma(0)},\ \cdots,x_{\sigma(m-1)})$を対応させる。（m と n の順序に注意せよ。$(x_{\sigma(0)},\ \cdots,x_{\sigma(m-1)})$は、変数 $x_0,\cdots,x_{m-1}$（の一部）からなる。）これをコンテクスト　モルフィズム(context morphism)とよび、３「研究方法」の（２）でのコンテクストの数学的実体として機能させることができる。もちろん、これらの全体は自然に圏をなす。これらのなかで、各 n (0<n<ω)に対して、特別の置換を次で定めておく:

$$j_n(i) = i \ \ (i < n).$$

この圏から非自明ハイティング代数の圏への反変関手(contravariant functor)を H として、代数的かつ圏論的な意味論の枠組の中での命題関数の数学的集まりを定めていると考える。ここでは、まだ意味論におけるの付値としての言語の解釈は、まだ与えられていない。命題論理の論理結合子に関しては、ハイティング代数の対応する演算をそのまま流用することができることに注意する。そして、関手の自然変換に関する圏論的に自然な仮定を加えておく。(やや技術的なのでここでは省略する。)

さらに２の「研究方法」の（１）に述べたφの実現として、

$$\mathcal{H}_{j_n} : \mathcal{H}_{n-1} \to \mathcal{H}_n$$

を考える。そして、各 n (0<n<ω)に対して、ふたつの束順序保存写像：

$$\forall_n,\ \exists_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1}$$

が、それぞれ$\mathcal{H}_{j_n}$の左および右随伴であるものとして導入する。これらは、次の図式を可換にするものとする (Beck の条件)。

$$\begin{array}{ccccc} & & \exists_{m+1} & & \\ & \mathcal{H}_{m+1} & \to & \mathcal{H}_m & \\ \mathcal{H}_{\sigma^+} & \downarrow & & \downarrow & \mathcal{H}_\sigma, \\ & \mathcal{H}_{n+1} & \to & \mathcal{H}_n & \\ & & \exists_{n+1} & & \end{array}$$

ここで、σ+は次で定まる置換である：

$$\sigma^+(i) = \begin{cases} i & \text{if } i \leq m, \\ n+1 & \text{if } i = m+1. \end{cases}$$

これらの条件を満たす H を hyperdoctrine と呼ぶ。

この準備のもとで、上記のコンテクストを伴った論理式(formula-in-context)と推件(sequent-in-context)を導入し、そしてそれらを扱う推件計算(sequent calculus)を導入した。また、これまでの意味での論理式や推件は、コンテクストが空であるような「コンテクストを伴った論理式、推件」の特別なも

のであると考える。ここまでの設定では、意味論に「個物」(individual)に対応するものは出現しない。すると、できあがった推件計算は free logic と呼ばれる、空な個体領域を許容あうる述語論理の推件計算になった。これはこの推件計算がうまく定義されていることを示すが、それと同時に通常の論理を扱うためには、適切な制限が必要となる。ここでは詳述しないが、重要なことは、この制限がコンテクストの縮約(context contraction)と∀の左導入規則と∃の右導入規則に関するものになっている。特に後者 2 つが固有変数条件を必要とする推論規則の反対側に関する制限であることが重要である。これらを満たす場合を正則(regular)と呼ぶことにする。以下では、すべて正則な場合を考える。

そして、H 上に、各記号の解釈を与える。具体的には n 変数の述語記号に対して、Hn の元を対応させる。これまでの道具立てよって、代数的な計算と随伴の計算を行うことができる。(ただし、コンテクストの変換(context change)の計算に関する補題を準備する必要があるが、技術的になるのでここでは割愛する。) その結果、恒等的に H0 の最大元となる閉論理式の集合が定まる。これを H の定める理論と呼び、E(H)と書く。また、普遍閉包(universal closure)を取ると E(H)に属する論理式の全体の集合を L(H)と書く。

（2）アンプル条件(ampleness condition)：一般に、L(H)は、述語記号に対する論理式の代入について閉じていないことが証明できる。これは、超直観主義述語論理の意味論を考えるうえで都合の悪い部分である。これを克服する必要がある。そこで、ここまでの議論を詳細に調べると、コンテクストを伴った論理式での述語記号に対する代入の対応物が記述されていないことが解った。これを取り扱えるだけの豊富さを備えている条件として ample および semi-ample という性質を導入した。例えば、完備ハイティング代数で定義される代数枠から自然に誘導される hyperdoctrine は ample であり、クリプキ枠から自然に誘導される hyperdoctrine は、semi-ample である。超直観主義述語論理の一般的完全性の問題は、各超直観主義述語論理に対して、それを特徴づける ample な hyperdoctrine の存在を示すことに帰着することが解り、これを証明することができた。

（3）応用として、ハルデン完全(Hallden-complete)な超直観主義述語論理の特徴付けを与えた。超直観主義述語論理 L がハルデン完全であるとは、L で証明可能な任意の論理式 A∨B で A と B に共通の述語記号がないとき、A が L で証明可能であるか、または、B が L で証明可能であることである。この特徴付け定理の証明には、普遍代数や命題論理の代数的意味論で使われている技術である超積(ultraproduct)を工夫して使った。この応用は、今回の成果を通して非古典命題論理の代数的意味論での技術を非古典述語論理の研究に適用する、という目標の１つの実現であり、大きな成果と言える。

（4）ある未解決問題の解決。本研究のターゲットのひとつであった中間述語論理における 30 年来の未解決問題に決着を与えた。これは当該分野における大きな成果で、今後の研究動向にも影響しうる内容と言える。問題を述べる。

中間述語論理 L が disjunction property (DP)を持つ、とは、L で証明可能な任意の論理式 A∨B に対して、A が L で証明可能であるか、または、B が L で証明可能であることである。(ハルデン完全性は、DP より真に弱い性質である。)

中間述語論理 L が existence property (EP) を持つ、とは、L で証明可能な任意の論理式 ∃xA(x)に対して、ある v が存在して、A(v) が L で証明可能であることである。

２の「研究目的」で述べた C: 完備化の要請「∃は無限個の∨」を考えれば、このふたつの性質には相互関係があると考えられ、特に EP から DP が導かれると予想されていた。一方で、1983 年に引用文献④によって、DP を持つが EP を持たない中間述語論理が示され、DP から EP が導かれないことは解っていたが、これまで「EP から DP が導かれるか？」は、それ以降、ながらく中間述語論理の未解決問題であった。(引用文献⑤参照)

ここまで記述した研究の直接の応用ではないが、正則性の導入時に正則性と同値な条件が幾つか導かれており、その重要性が解っていた論理式がある。そこで、その論理式を使って議論し、解決に至った。答えは、「否定的」である。すなわち、EP を持つが DP を持たない中間述語論理を構成し、EP から DP が導かれないことを示した。また、EP から DP が導かれるための十分条件を示した。

（5）弱い EP の研究。上記の（4）の研究から発展して、弱い EP(weak existence property)の概念を導入し、これと EP などとの相互関係を調べた。

（6）構成的数学との関連性。当初予期していなかった知見が得られたので、報告しておく。それは、「構成的数学」と呼ばれる数学基礎論・数理論理学のみならず、計算機科学とも関連する分野(引用文献⑥参照)との関連である。Omniscience principles と呼ばれる構成的数学における概念があり、これは∨や∃のふるまいに関する公理である。よって、述語論理の意味論が応用できる。特に DP と EP は直観主義論理の構成性を表す特徴的な性質と考えられているが、本研究で取り扱ってきた手法で、omniscience principles から誘導される論理的公理が、DP と EP を保存することが示された。また、この証明が構成的数学では使われていない手法であることから、構成的数学の専門家や自然数論のモデルの専門家らとの共同研究の糸口となった。今後の発展を期待している。

以上の成果のうち、（１）から（３）については、論文の原稿を作成中であり、（４）と（５）については査読を受けて受理され、掲載決定している。また、（６）の成果の部分は、査読付きの国際会議などで一部発表済みであり、各専門家からなる共同研究グループは、すでに共同研究開始している。

＜引用文献＞

① Ciabattoni, A., Galatos, N. and Terui, K., Algebraic proof theory for substructural logics: Cut-elimination and completions, Annals of Pure and Applied Logic, Vol.163, 2012, 266–290, (申請当時は preprint)

② Harding, J. and Bezhanishvili, G., MacNeille completions of Heyting algebras, Houston Journal of Mathematics, Vol.30, 2004, 937-952.

③ Pitts, A., Categorical Logic, Handbook of Logic in Computer Science, Vol.5, 2001, 39–128.

④ Nakamura, T., Disjunction property for some intermediate predicate logics, Reports on Mathematical Logic 15 (1983), 33--39.

⑤ Ono, H., Some problems in intermediate predicate logics. Reports on Mathematical Logic 21 (1987), 55--67. (Supplement: ibid. 22(1988), 117--118.)

⑥ Troelstra, A.S. and van Dalen, D., Constructivism in mathematics. Vol. I. An introduction, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 121. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　４件）

① Nobu-Yuki Suzuki、A Negative solution to Ono's problem P52: Existence and disjunction properties in intermediate predicate logics, Hiroakira Ono on Residuated Lattices and Substructural Logics (tentative), Outstanding Contributions in Logic, 査読有、Springer 社の出版なので、印刷過程で DOI が付されるはずである。

② Nobu-Yuki Suzuki、Some weak variants of the existence and disjunction properties in intermediate predicate logics、Bulletin of the Section of Logic、査読有、掲載決定、2017、http://www.filozof.uni.lodz.pl/bulletin/contents.php にて閲覧できる予定

③ Nobu-Yuki Suzuki 、Semantics for Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths for Game Theory, Economic Theory, Vol.53,査読有 2013, 85--110.
DOI 10.1007/s00199-012-0707-1

④ Nakagami, Y., Suzuki, N.-Y., Sekine, R., Matsuura, T., and Aihara, J., The Occurrence of π Molecular Orbitals in Planar Boron Clusters, Bulletin of the Chemical Society of Japan Vol.85, 査読有　2012, 475--480.
http://www.journal.csj.jp/doi/pdf/10.1246/bcsj.20110203

〔学会発表〕（計３１件）

① 鈴木信行、中間述語論理における公理型としての omniscience principles、2017 年度年会(数学基礎論分科会)、2017 年 3 月 25 日、首都大学東京　(東京都八王子市)

② 鈴木信行、Some weak variants of existence and disjunction properties in intermediate predicate logics、MLG 数理論理学研究集会、2016 年 10 月 29 日、 四季の湯強羅静雲荘(神奈川県足柄下郡箱根町)

③ Nobu-Yuki Suzuki、　Relations among some weak variants of existence and disjunction properties in intermediate predicate logics、Logic Colloquium 2016、2016 年 8 月 2 日、リーズ市（連合王国）(査読有)

④ Nobu-Yuki Suzuki 、The existence property and related properties in intermediate predicate logics、JAIST LOGIC WORKSHOP SERIES 2015: Constructivism and Computability、2015 年 3 月 5 日、金沢県政記念館しいのき迎賓館　金沢市（石川県）(招待講演)

⑤ 鈴木信行、中間述語論理の話題、2015 年 11 月 5 日、第 206 回 鹿児島大学数理情報科学談話会、鹿児島大学理学部　鹿児島市（鹿児島県）(招待講演)

⑥ Nobu-Yuki Suzuki 、Some properties related to existence property in intermediate predicate logics、Logic Colloquium 2014、2014 年 7 月 14 日、ウィーン市（オーストリア）(査読有)

⑦ Nobu-Yuki Suzuki、Some Considerations of Prediction/Decision Criteria in Epistemic Predicate Logics、13th SAET Conference on Current Trends in Economics 2013、2013 年 7 月 22 日、パリ市（フランス）(査読有)

⑧ Nobu-Yuki Suzuki 、A Note on the Existence and Disjunction Properties in Super-Intuitionistic Predicate Logics、Advances in Modal Logic 2012 (AiML 2012)、2012 年 8 月 22 日、コペンハーゲン市（デンマーク）(査読有)

他、査読付き発表９件、招待講演１件

〔図書〕（計　１件）
① 船木由喜彦、石川竜一郎、鈴木信行(分担執筆)他、NTT 出版、制度と認識の経済学（第６章　ゲーム論理入門)、２０１３、２２５－２７８

６．研究組織
(1)研究代表者
鈴木　信行（SUZUKI, Nobu-Yuki）
静岡大学・理学部・教授
研究者番号：　６０２１６４２１