

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540121

研究課題名(和文) 中規模無限基数上の不変な構造

研究課題名(英文) Invariant structures on medium-size infinite cardinals

研究代表者

吉信 康夫 (YOSHINOBU, YASUO)

名古屋大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：90281063

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：公理的集合論の研究において、アレフ数2以上の無限基数のもつ組合せ的性質は、それ以下の無限基数に比べて解明されていない点が多い。本研究では、アレフ数2以上の無限基数のうち比較的小さいものたちのもつ組合せ的性質の、いろいろな強制拡大の下での不変性を詳しく調べた。その結果、強制公理と呼ばれる集合論のよく知られた一連の公理たちが、どのような種類の半順序集合による強制拡大によってどの程度保存されるかという問題を中心に、いくつかの重要な知見を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：In the study of axiomatic set theory, combinatorial properties of infinite cardinals greater than or equal to aleph 2 are less understood than those of smaller cardinals. In this research, we studied invariance of combinatorial properties of relatively small infinite cardinals greater than or equal to aleph 2 under various forcing extensions. As a result, we obtained several significant consequences, mainly about problems to what extent and with what sort of partially ordered sets well-known axioms of set theory called forcing axioms are preserved under forcing extensions.

研究分野：公理的集合論

キーワード：数学基礎論 公理的集合論 強制法 集合論的位相空間論 強制公理 パナッハ・マズア型ゲーム

## 1. 研究開始当初の背景

### (1)ゲーデルのプログラム

自然数全体の集合の濃度と実数全体の濃度の中間の大きさを持つ無限濃度は存在しないという主張である連続体仮説が、ゲーデルとコーエンによって集合論の標準的な公理系である(選択公理を伴う)ツェルメロ・フレンケルの公理系(ZFC)から証明も反証もできない(独立である)ことが示されて以降、無限組合せ論についての多くの命題が同様にZFCから独立であることが示されてきた。一方、ZFCに自然な公理を追加して、それらの独立命題の真偽を決定しようとする試みも続けられている。なかでもゲーデルは、非常に大きく強い性質を持つ無限濃度の存在を仮定する(巨大基数公理)ことで、連続体仮説の真偽を決定できるのではないかと考えていた。その後、この予想は文字どおりには正しくなかったものの、巨大基数公理やそれに似た性格を持つ公理を仮定することで、実数をはじめ無限についてのさまざまな命題の真偽が決定できることが知られてきており、巨大基数公理や類似の公理を用いた無限の研究は、現代集合論の大きな流れの一つになっている。本研究グループの一連の研究も大きくはこのような流れの一環と位置付けることができる。

### (2)本研究以前の我々の研究

本研究以前に我々は、アレフ数 $2$ 以上の無限基数のもつ組合せ的性質が、しばしばより小さい無限基数のもつそれとは異なる様相を示すことに着目し、それらの対象について幾つかの成果を得てきた。例えば、科研費若手研究(B)「アレフ数 $2$ 以上の無限基数上の組合せ論と巨大基数公理」(平成17~19年度、課題番号17740053)の補助の下では、代表者とKönigの共同研究により、巨大基数公理に類似の性質を持つ公理である強制公理がどの程度アレフ $2$ 閉な半順序集合による強制法で保たれるかを明らかにし、また、代表者と嘉田、友安との共同研究で、距離付け可能な位相空間のコンパクト化にまつわる基数不変量の性質についても明らかにするなどした。これに続いて、基盤研究(C)「中規模無限基数上の組合せ論」(平成20~24年度、課題番号20540114)の補助の下では、代表者とAsperó, Kruegerとの共同研究で、可算集合族上の反映原理と呼ばれる無限組合せ論的命題の否定と上述の強制公理との両立性を明らかにし、位相空間のコンパクト化にまつわる基数不変量についても代表者と嘉田との共同研究によってより構造的な理論を構築した。さらに代表者は先述のKönigとの共同研究を発展させ、ゲームの概念を用いて記述されたアレフ $2$ 閉より弱い性質を持つ半順序集合による強制法によって、固有強制法公理(PFA)と呼ばれる強制公理が保存されることを見出した。

これらの研究を通じて、我々は、アレフ $2$ 以

上の無限基数上の組合せ論を考えるにあたっては、関連する組合せ的構造や位相構造の強制法に対する不変性が重要な鍵を握ると思いついた。

## 2. 研究の目的

以上を踏まえ、本研究では、アレフ数 $2$ 以上の比較的小さい基数上の組合せ的構造や位相構造のさまざまな強制法に対する不変性の程度を調べることを目的の中心に据えた。より具体的には、以下の(1)(2)二つの範疇で研究に取り組むことにした。

### (1)強制公理を保存する強制法

強制公理とは、あるクラスの半順序集合に対し、十分にジェネリックなフィルターが存在することを主張する公理であり、比較的小さい無限基数の組合せ論に直接影響を及ぼす一方で、十分強い強制公理は巨大基数公理に似た性質を有しており、ZFCを拡張する公理の候補としてしばしば検討されるものである。本研究では、特に固有強制法公理(PFA)と呼ばれる強制公理を中心に、それを保存する強制法のクラスで可能な限り包括的なものを調べることを目的の一つに掲げた。

### (2)位相空間の諸性質を保存する強制法

リンデレフ性やパラコンパクト性など位相空間の被覆についての性質が、コーエン強制やランダム強制などよく知られた幾つかの強制法のもとで保存されることはトールや岩佐などの先行研究によって知られていたが、逆にこれらの性質を保存しない強制法がどのようなものか、またメタコンパクト性など他の被覆についての性質がどのような強制法のもとで保存されるかについて明らかにすることを目的の一つとした。

## 3. 研究の方法

組織としては、研究代表者を含む名古屋近辺の研究メンバーからなる統括部門を置き、この下に研究の目的(1)(2)のそれぞれについて研究するチームを編成する構成をとった。各部門のメンバーは以下の通りである。

統括部(名古屋集合論セミナー):吉信, 宮元, 松原

グループ(1):吉信, 淵野, 酒井, 薄葉, König

グループ(2):吉信, 嘉田, 友安, 薄葉

統括部は定期的に名古屋集合論セミナーを開催し、各研究グループの進捗や国内外の最新の研究動向についての情報を蒐集、共有し、研究の方針の大枠についての判断を行った。各グループでは、それを参考に、代表者が主体となって研究を進め、適宜他のメンバーの助言を得た。

遠方のメンバーとの意思疎通は電子メールによる他、相互の訪問や、研究集会の機会

などを利用した研究打ち合わせによった。

下記の長期間の研究打ち合わせを実施した。

(1)2013年10月16日~11月4日:

Bernhard König が名古屋大学を訪問, 主に研究の目的欄のテーマ(1)について議論した。

#### 4. 研究成果

(1)(研究の目的欄のテーマ(1)に関連)

与えられた半順序集合に対し, 二人のプレイヤーが交互により小さい要素を選んで行き, 後手が手詰まりになることなくこれが所定の回数続けられた時に後手の勝ちとする, というゲームをこの半順序集合上のバナッハ・マズアゲームという。長さ $(n+1)$ のバナッハ・マズアゲームにおいて, 後手が, 先手のそれまでの差し手のプール下限値と今何手目かの情報にのみに依存する必勝法を持つような半順序集合を戦略的閉であるという。また, 通常のパナッハ・マズアゲームと異なり, 先手が各手番で単一の要素ではなく可算集合を選んでそのプール下限値を通常のゲームの差し手のように用いるゲーム(\*ゲームと呼ぶ)を考えると, 後手が, 先手のそれまでの差し手の和集合のみに依存する必勝法を持つような半順序集合を\*戦術的閉, その情報に加えて今何手目かの情報も用いる必勝法を持つような半順序集合を\*作戦的閉という。\*作戦的閉は\*戦術的閉と作戦的閉のいずれよりも広い概念である。代表者の以前の研究により, \*作戦的閉な半順序集合による強制法は, 強制公理の一つである固有強制法公理(PFA)を保つことがわかっていたが, \*作戦的閉が作戦的閉より真に広い概念であるかどうか不明であった。これに関して, 本研究期間中に次のことがわかった。

$MA^+(n)$ 閉と呼ばれる強制公理の下では, \*戦術的閉な任意の半順序集合による強制法により  $MA^+(n)$ からの帰結であるチャン予想が保存される。一方作戦的閉な半順序集合による強制法ではチャン予想を保存しないことがある。従って, 作戦的閉性は\*戦術的閉性を含意しない。 $MA^+(n)$ の下では, 作戦的閉な任意の半順序集合による強制法によって  $SCP$ と呼ばれる組合せの命題を強制することはできない。一方\*戦術的閉な半順序集合による強制法では  $SCP$ を強制することができる。従って, \*戦術的閉性は作戦的閉性を含意しない。

より, \*戦術的閉と作戦的閉は互いに独立な概念であり, 特に\*作戦的閉はこれらのいずれよりも真に広い概念である。

(2)(研究の目的欄のテーマ(1)に関連)

上述の  $SCP$ とは,  $\omega_2$ 未満の各極限順序数に対し, その共終で可算な部分集合を対応させる列で,  $\omega_1$ 共終な  $\omega_2$ 未満の各順序数に

対し, そのある閉共終部分集合上で包含関係に関して単調増加かつ連続となるようなものが存在するという主張であるが, この命題の自然な拡張として, 「単調増加かつ連続」に加えて「和集合がその順序数に一致する」を要求したものを  $SCP_i$ , 「単調増加かつ連続」に加えて「終拡大」を要求したものを  $SCP_e$ と呼ぶとき, 次のことがわかった。

$SCP_i$ は  $SCP$ と  $CP$ の連言と同値である。特に,  $SCP_i$ は  $PFA$ と両立する。ただし,  $CP$ とは登攀可能性原理と呼ばれる組合せ的原理で,  $SCP$ が\*戦術的閉な半順序集合に対するマーティン型公理として特徴付けられるのと同様に,  $CP$ は作戦的閉な半順序集合に対するマーティン型公理として特徴付けられる。

$SCP_e$ も  $SCP$ と  $CP$ の双方を含意し, 従って  $SCP_i$ を含意するが, さらに  $AP$ と呼ばれる命題も含意する。 $AP$ は  $PFA$ から否定されることがわかっているため,  $SCP_e$ は  $PFA$ と両立せず,  $SCP_i$ より真に強い。

先述の\*ゲームをさらに改変して, 先手が, 後手の直前の差し手より小さい要素からなる可算集合を選ぶゲーム(\*\*ゲームと呼ぶ)を考え, \*ゲームのときと同様にして\*\*戦術的閉, \*\*作戦的閉の概念を考えることができるが, このとき  $SCP_e$ は\*\*戦術的閉な半順序集合に対するマーティン型公理と同値である。このことから, \*\*戦術的閉のクラスは\*戦術的閉のクラスより真に広いこともわかった。

さらに, 代表者と König との共同研究で, 次を得た。

$PFA$ の下で,  $SCP_e$ を強制する自然な強制法を行うと,  $PFA$ の帰結である  $\omega_2$ アロンシャイン木の非存在が保存される。従って,  $SCP_e$ はスクエア原理( $\omega_2$ アロンシャイン木の存在を導く)を含意しない。

(3)(研究の目的欄のテーマ(2)に関連)

$T_1$ 分離公理を満たすコンパクト空間で, 基数を保ち実数を付加するような任意の強制法を行うと, コンパクト性よりずっと弱いメタコンパクト性さえ失うような例を発見した。リンデレフ性や  $T_2$ パラコンパクト性などの位相空間の被覆についての性質は, コーエン強制やランダム強制など実数を付け加える性質のよい強制法のもとで保存されることは, トールや岩佐などの先行研究で知られており, メタコンパクト性についてもこの種の保存性があるかを問う岩佐の問題に否定的な解答を与えた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

(1) Yasuo Yoshinobu, The \*-variation of

the Banach-Mazur game and forcing axiom, *Annals of Pure and Applied Logic*, 査読有, vol. 168, no.6, 2017, pp. 1335-1359.  
DOI:10.1016/j.apal.2017.01.003

〔学会発表〕(計3件)

- (1) Yasuo Yoshinobu, The setwise climbability property and its variations, Workshop on Mathematical Logic on the Occasion of Sakae Fuchino's 60<sup>th</sup> Birthday, 2014年11月17日, 神戸大学.
- (2) Yasuo Yoshinobu, Fragments of Martin's Maximum and closure properties of posets, International Conference on Topology and Geometry 2013 (招待講演), 2013年9月2日, 島根大学.
- (3) Yasuo Yoshinobu, Operations vs. \*-tactics, 京都大学数理解析研究所研究集会「強制法による拡大と巨大基数」, 2012年12月4日, 京都大学.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕なし

## 6. 研究組織

(1)研究代表者

吉信 康夫 (YOSHINOBU YASUO)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：90281063

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

瀧野 昌 (FUCHINO SAKAE)

神戸大学・大学院システム情報学研究科・教授

研究者番号：30292098

宮元 忠敏 (MIYAMOTO TADATOSHI)

南山大学・経営学部・教授

研究者番号：70229889

嘉田 勝 (KADA MASARU)

大阪府立大学・大学院理学系研究科・准教授

研究者番号：00312447

友安 一夫 (TOMOYASU KAZUO)

都城工業高等専門学校・一般科目理科・准教授

研究者番号：10332107

酒井 拓史 (SAKAI HIROSHI)

神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授

研究者番号：70468039

薄葉 季路 (USUBA TOSHIMICHI)

早稲田大学・基幹理工学部・准教授

研究者番号：10513632

(4) 研究協力者

松原 洋 (MATSUBARA YO)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：30242788

Bernhard König

IDS GmbH -- Analysis and Reporting Services